MA1101-5 - Introducción al Álgebra Semestre 2013-01
Profesor: Jaime Ortega
Auxiliares: Simón Piga

Auxiliar 08
Grupos

P1. a) Sea G un grupo tal que cada elemento es su propio inverso, es decir, que $g = g^{-1}$. Demuestre que G es abeliano.

b) Sea G un grupo tal que $|G| = 4$. Demuestre que $\forall g \in G,\ a^3 \neq e$

P2. Sea $(G, *)$ un grupo, y sean $H, K \subseteq G$. Se define el conjunto:

$$KH := K * H := \{k * h \mid k \in K, h \in H\}$$

Demuestre que KH es subgrupo de G si y solo si, $KH = HK$.

P3. a) Para cada $a \in G$, se define el centralizador de a como:

$$C(a) := \{g \in G \mid ga = ag\}$$

Demuestre que el $C(a)$ es subgrupo de G.

b) Utilice lo anterior para probar que si $|G| = p$ con p primo, entonces G es abeliano.

P4. Sean $(G, *), (H, \cdot)$ grupos. Sea además $f : G \longrightarrow H$ un morfismo de grupos.

a) Demuestre que $f(e_G) = e_H$ y que $f(g)^{-1} = f(g^{-1})$

b) Muestre que $f(G)$ es subgrupo de H.

c) Se define

$$K_f = \{g \in G \mid f(g) = g_H\}$$

Demuestre que K_f es subgrupo de G.

d) Muestre que:

$$f \text{ es inyectiva } \Leftrightarrow K_f = \{e_G\}$$

e) Suponga que $|G| = p > |H|$, con p primo. Demuestre que f es el morfismo trivial, es decir que $f(g) = e_H$, $\forall g \in G$.