MA1101-1 - Introducción al álgebra. Semestre 2013-01

Profesor: Jaime Ortega.

Auxiliares: Simón Piga

Clase auxiliar 04 Relaciones (!)

P1. Sobre $\mathbb{R}$ se define la relación $\asymp$ de la forma:

$$x \asymp y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$$

- a) Demuestre que $\asymp$ es una relación de Equivalencia.
 b) Al conjunto cociente $\mathbb{R}/\asymp$ se le llama $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. De forma natural se define la operación suma: $[a] + [b] = [a + b] \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$
 Se define $|a|$, el orden de a , como el menor natural $n > 0$ tal que

$$\underbrace{[a] + [a] + \cdots + [a]}_{n \text{ veces}} = [0]$$

(Si no se cumple para ningún $n > 0$, decimos que tiene orden infinito)
 Demuestre que los racionales tienen orden finito y los irracionales orden infinito.

- c) Construya la relación análoga con $x \asymp y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$ y analice el conjunto cociente $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$.

P2. Sean A_1 y A_2 dos conjuntos. Además, cada uno está dotado de una relación de orden total denotadas $\leq_1$ y $\leq_2$ respectivamente. Se define una relación en $A_1 \times A_2$ de la forma:

$$(a, b) \preceq (x, y) \Leftrightarrow a \leq_1 x \vee \{a = x \wedge b \leq_2 y\}$$

Demuestre que $\preceq$ es un orden total sobre $A_1 \times A_2$. Piense en una extensión para el caso $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$.

P3. Sea $\mathcal{F} := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ biactiva}\}$. Se define una relación sobre $\mathcal{F}$ definida como:

$$f \sim g \Leftrightarrow f \circ g^{-1} = \ell \text{ con } \ell \in \mathcal{F} \text{ y lineal}$$

(Estamos tomando ℓ como una función lineal biyectiva, vale decir: $\ell(x) = ax$ con $a \neq 0$)
 Demuestre que $\sim$ es una relación de equivalencia y compárela con la relación de la pregunta 1.

Estudie cómo es el Conjunto Cociente $\mathcal{F}/\sim$