

P3

PDQ:

a) C_f ES BIYEC.

VEAMOS Q' C_f ES INY.

TOMEMOS:

$$C_f(h) = C_f(g)$$

$$h \circ f = g \circ f \quad / \circ f^{-1}$$

$$h \circ f \circ f^{-1} = g \circ f \circ f^{-1}$$

$$h \circ id_E = g \circ id_E \Rightarrow \underline{h = g}$$

LUEGO C_f ES INY.

VEAMOS Q' C_f ES EPIYECTIVA:

SEA $g \in \beta$ CUALQUIERA:

TOMEMOS $h = g \circ f^{-1}$; DEMOSTREMOS Q' $C_f(h) = g$.

EN EFECTO:

$$C_f(h) = g \circ f^{-1} \circ f = g \circ id_E = \underline{g}.$$

LUEGO g TIENE PREIMAGEN.

$\therefore C_f$ ES SOBRYECTIVA.

COMO C_f ES INY Y SOBRYE $\Rightarrow \underline{C_f \text{ ES BIYECTIVA.}}$

b) P.D.Q: $f = \text{id}_E \Rightarrow \text{id}_B = C_f$.

HIP: $f = \text{id}_E$.

CLARAMENTE si $g \in B \Rightarrow C_f(g) = g \circ f = g \circ \text{id}_E = g$.

POR LO Q' $C_f(g) = g \quad \forall g \in B$

ES DECIR C_f ES LA id_B . ($C_f = \text{id}_B$)

c) ~~(Q/A)~~

HIP: $C_f(h \circ g) = C_f(h) \circ C_f(g)$

P.D.Q.: $f = \text{id}_E$.

POR HIPOTESIS: $C_f(h \circ g) = C_f(h) \circ C_f(g)$

$\Rightarrow h \circ g \circ f = (h \circ f) \circ (g \circ f) \quad / \circ f^{-1}$

$\Rightarrow h \circ g \circ f \circ f^{-1} = h \circ f \circ g \circ f \circ f^{-1}$

~~$[f \circ h \circ g \circ f]$~~

$\Rightarrow h \circ g = h \circ f \circ g \quad / \circ g^{-1}$

$\Rightarrow h = h \circ f \quad / h^{-1} \circ$

$\Rightarrow \text{id}_E = f$



P4//

HIP: f ES INYECTIVA.

PDQ: $f(A^c) \subseteq (f(A))^c$

TOMAREMOS $y \in f(A^c)$ CUALQUIERA Y DEMOSTRAREMOS
Q' NO PERTENECE A $(f(A))$ (ES DECIR Q' PERTENECE
A $(f(A))^c$).

$$\exists x \in A^c \quad y \in f(A^c) \Rightarrow \exists x \in A^c \text{ TAL Q' } f(x) = y$$

$$\Rightarrow \exists x \notin A \text{ TAL Q' } f(x) = y.$$

AHORA, SIGAMOS POR CONTRADICCIÓN:

SUPONGAMOS Q' $y \in f(A)$

$$\Rightarrow \exists \bar{x} \in A \text{ TAL Q' } f(\bar{x}) = y \quad \left[\begin{array}{l} \text{NOTAR Q' ESTO } \bar{x} \text{ PUEDE NO} \\ \text{SER EL MISMO Q } x \text{ ANTERIOR} \end{array} \right]$$

$$\text{LUEGO: } f(x) = f(\bar{x}) \Rightarrow x = \bar{x} \quad (\text{PUES } f \text{ ES INYECTIVA})$$

ES DECIR Q', COMO f ES INYECTIVA, RESULTO' SER
~~[EX/MISMO/Q]~~ Q' $x = \bar{x}$, PERO ESTO NO PUEDE
SER PUES $\bar{x} \in A \wedge x \notin A$.

$$\therefore y \notin f(A) \Rightarrow y \in (f(A))^c$$



b) HIP: f ES SOBREVECTIVA.

$$\text{PDR: } (f(A))^c \subseteq f(A^c)$$

SEGUIREMOS DE LA MISMA FORMA. Q' EN LA PARTE (a).

$$\text{SEA } y \in (f(A))^c \Rightarrow y \notin f(A) \Rightarrow \nexists x \in A \text{ TAL Q' } f(x) = y \quad (*)$$

COMO f ES SOBREVECTIVA $\exists x \in R$ TAL Q'
 $f(x) = y$.

CLARAMENTE ESE $x \notin A$ (POR $(*)$)

LUEGO:

$$\exists x \notin A \text{ TAL Q' } f(x) = y$$

$$\Rightarrow \exists x \in A^c \text{ TAL Q' } f(x) = y \Rightarrow y \in f(A^c)$$

$$\text{LUEGO: } (f(A))^c \subseteq f(A^c)$$

□