MA1101-1 - Introducción al álgebra. Semestre 2013-01
Profesor: Jaime Ortega.
Auxiliares: Simón Piga

Clase auxiliar 03
3 de Abril 2013

P1. Sean $f, g : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas como:

$$f(x) = x^2 + 1 \qquad\qquad g(x) = \frac{1}{x+1}$$

Calcule las siguientes preimágenes:

a) $f^{-1}([0,1)), f^{-1}([-1,1]), f^{-1}([0,2]),\ f^{-1}([1,2])$
b) $g^{-1}([\frac{1}{2},1]),\ g^{-1}([0,\frac{1}{2}]),\ g^{-1}([0,1]), g^{-1}([-\infty,0])$

P2. Sean $f, g : E \longrightarrow E$ Demuestre las siguientes propiedades:

a) f es Biyectiva $\Leftrightarrow f \circ f$ es Biyectiva.
b) f y g inyectivas $\Rightarrow g \circ f$ inyectiva
c) $g \circ f$ inyectiva $\Rightarrow f$ inyectiva (Qué ocurre con g?)
d) $g \circ f$ es sobreyectiva $\Rightarrow g$ es sobreyectiva. (Qué ocurre con f?)
e) Suponga que g es biyectiva, demuestre que: f inyectiva $\Leftrightarrow f \circ g$ inyectiva

.

P3. Se define $\beta := \{h : [0,1] \longrightarrow [0,1] \mid h \text{ es biyectiva } \}$ Es decir el conjunto de todas las funciones biyectivas de $[0,1]$ en $[0,1]$. Sea además $f \in \beta$ fijo. Se define la función $\mathcal{C}_f : \beta \longrightarrow \beta$ como:

$$\mathcal{C}_f(h) = h \circ f$$

para cada $h \in \beta$. Demuestre que:

a) $\mathcal{C}_f$ es Biyectiva
b) si $f = id_E$ entonces $\mathcal{C}_f = id_\beta$
c) si $\mathcal{C}_f(h \circ g) = \mathcal{C}_f(h) \circ \mathcal{C}_f(g)$ entonces $f = id_E$.

P4. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ Demuestre que:

a) Si f es inyectiva: $f(A^c) \subseteq f(A)^c$
b) Si f es sobreyectiva $f(A)^c \subseteq f(A^c)$
c) $f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$
d) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

P5. [De la vez anterior...] Considere los conjuntos $\mathcal{F} = \{f : [0,1] \longrightarrow [0,1] \mid f \text{ es función}\}$ y $\Lambda = \{f : [0,1] \longrightarrow [0,1] \mid f \text{ es biyectiva}\}$. Es decir, $\mathcal{F}$ como el conjunto de todas las funciones y Λ como el conjunto de todas las funciones biyectivas. Note que, claramente, $\Lambda \subseteq \mathcal{F}$

Considere además las funciones:

$$\begin{aligned} \psi :& \mathcal{F} \longrightarrow [0,1] \\ f &\to \psi(f) = \frac{f(0)+f(1)}{2} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} I :& \Lambda \longrightarrow \Lambda \\ f &\to I(f) = f^{-1} \end{aligned}$$

a) (Listo!) Estudie la Inyectividad y la Sobreyectividad de ψ y de I.

b) Demuestre que $I(f \circ g) = I(g) \circ I(f)$

c) Considere la función $\Phi = \psi \circ I$. Demuestre que la preimagen por Φ del 0 es vacía, es decir, no existe ninguna función f tal que: $\Phi(f) = \psi(I(f)) = 0$