

P11 (a)

$$p(x) = x^5 - 2x^3 - 2x^2 - 3x - 2$$

Busquemos las raíces de  $p$  para así saber como factorizarlo.

Recordemos que:

$$r \text{ es raíz de } p \Leftrightarrow p(r) = 0$$

Como  $p$  es mónico a coeficientes enteros, sus raíces dividen a  $-2$ , y así, probemos:

$$\bullet p(1) = 1^5 - 2 \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 - 2 = 1 - 2 - 2 - 3 - 2 \neq 0$$

$\Rightarrow 1$  no es raíz de  $p$ .

$$\Leftrightarrow (x-1) \text{ no divide a } p(x)$$

$$\bullet p(-1) = (-1)^5 - 2(-1)^3 - 2(-1)^2 - 3(-1) - 2$$

$$= -1 + 2 - 2 + 3 - 2 = 0$$

$\Rightarrow -1$  es raíz de  $p$ !

$$\Leftrightarrow (x+1) \text{ divide a } p(x)$$

Busquemos otra raíz:

$$\bullet p(2) = 2^5 - 2 \cdot 2^3 - 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 - 2$$

$$= 32 - 16 - 8 - 6 - 2 = 0$$

$\Rightarrow 2$  es raíz de  $p$ .

$$\Leftrightarrow (x-2) \text{ divide a } p.$$

Y ahora que hemos encontrado dos raíces, podemos dividir  $p(x)$  para luego buscar el resto de las raíces en una expresión simplificada:

$$(x^5 - 2x^3 - 2x^2 - 3x - 2) : (x+1) = x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$$

$$- \begin{array}{r} 5 \\ x + x^4 \end{array}$$

$$0 - x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 3x - 2$$

$$- \begin{array}{r} 4 \\ -x - x^3 \end{array}$$

$$0 - x^3 - 2x^2 - 3x - 2$$

$$- \begin{array}{r} 3 \\ -x - x^2 \end{array}$$

$$0 - x^2 - 3x - 2$$

$$- \begin{array}{r} 2 \\ -x - x^2 \end{array}$$

$$-2x - 2$$

$$- \begin{array}{r} -2x - 2 \end{array}$$

$$0$$

Que quede un valor distinto de 0 de resto, cuando sabemos que estamos dividiendo por un divisor, indica error!

Y ahora dividamos  $(x^4 - x^3 - x^2 - x - 2)$  por  $(x-2)$ , pero esta vez usando la Regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -1 & -1 & -1 & -2 \end{array}$$

$$2 \quad \begin{array}{r|rrrrr} & & 2 & 2 & 2 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow (x^4 - x^3 - x^2 - x - 2) : (x-2) = x^3 + x^2 + x + 1$$

$$0$$

$$2$$

Es decir, hasta ahora tenemos que:

$$x^5 - 2x^3 - 2x^2 - 3x - 2 = (x+1)(x-2)(x^3 + x^2 + x + 1)$$

Y luego; notando que:

$$x^3 + x^2 + x + 1 = (x+1)(x^2 + 1)$$

Tenemos que:

$$p(x) = (x+1)(x-2)(x+1)(x^2+1)$$

$$= (x+1)^2 (x-2)(x^2+1)$$

$$= (x+1)^2 (x-2)(x+i)(x-i)$$

Factorización  
en  $\mathbb{R}$ .

Factorización  
en  $\mathbb{C}$ .

Y sus raíces son:  $-1, 2, i, -i$ .

(b) Probamos: (con complejos de módulo  $\sqrt{2}$ )

$$p(1+i) = (1+i)^4 - 4(1+i)^3 + 10(1+i) - 12(1+i) + 8$$

$$= (1+i)^2 (1+i)^2 - 4(1+i)^2 (1+i) + 10(2i) - 12(1+i) + 8$$

$$= 2i \cdot 2i - 8i(1+i) + 20i - 12 - 12i + 8$$

$$= -4 - 8i + 8 + 20i - 12 - 12i + 8 = 0$$

$\Rightarrow (1+i)$  es raíz de  $p$ .

$\Rightarrow (1-i)$  también es raíz de  $p$ .

$$\Rightarrow p(z) \text{ es divisible por: } (z - (1+i))(z - (1-i))$$

$$= z^2 - z(1-i) - z(1+i) + (1+i)(1-i)$$

$$= z^2 - 2z + 2$$

Dividamos:

$$z^4 - 4z^3 + 10z^2 - 12z + 8 : z^2 - 2z + 2 = z^2 - 2z + 4$$

$$-(z^4 - 2z^3 + 2z^2)$$

$$-2z^3 + 8z^2 - 12z + 8$$

$$-(-2z^3 + 4z^2 - 4z)$$

$$4z^2 - 8z + 8$$

$$-(4z^2 - 8z + 8)$$

0

$$\Rightarrow p(z) = (z^2 - 2z + 2)(z^2 - 2z + 4)$$

Y nos falta encontrar las raíces de  $(z^2 - 2z + 4)$

$$\Rightarrow z_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 16}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{12}i}{2} = 1 \pm \sqrt{3}i$$

∴ Las raíces de  $p$  son:  $(1 + \sqrt{3}i), (1 - \sqrt{3}i),$   
 $(1 + i), (1 - i)$

P2

$$\mathcal{T} = \{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es biyectiva} \}$$

(a) Sean  $f, g \in \mathcal{T}$ , o equivalentemente,  $(f, g) \in \mathcal{T} \times \mathcal{T}$ .

Queremos ver que  $\Phi(f, g) \in \mathcal{T}$ , es decir, queremos ver que  $\Phi(f, g)$  corresponde a una función biyectiva que va de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$ .

En efecto, como  $f, g \in \mathcal{T}$ , sabemos que:

$f^{-1}, g^{-1} \in \mathcal{T}$  (pues son las inversas de biyectivas de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$  y luego, son biyectivas de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$ ).

Y entonces:  $g^{-1} \circ f^{-1} \in \mathcal{T}$ , por ser composición de funciones biyectivas de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$ .

Y así, notando que:

$$g^{-1} \circ f^{-1} = (f \circ g)^{-1} = \Phi(f, g)$$

Es claro que:  $\Phi(f, g) \in \mathcal{T}$ .

(b) Probemos que  $\Phi$  es epiyectiva.

Sea  $h \in \mathcal{T}$

Luego  $h^{-1} \in \mathcal{T}$

Y como  $d_{\mathcal{R}}^{-1} = id_{\mathcal{R}} \in \mathcal{T}$ , entonces:

$$\Phi(h^{-1}, id_{\mathcal{R}}) = (h^{-1} \circ id_{\mathcal{R}})^{-1} = id_{\mathcal{R}}^{-1} \circ (h^{-1})^{-1} = id \circ h = h$$

Es decir,  $(\forall h \in \mathcal{T}), (\exists (f, g) \in \mathcal{T} \times \mathcal{T}), \Phi(f, g) = h$

$\therefore \Phi$  es epiyectiva.  $\blacksquare$

Para ver que  $\Phi$  no es inyectiva, nos basta mostrar que  $\exists h \in \mathcal{T}$ , tal que  $h$  puede ser escrita como la imagen mediante  $\Phi$  de dos pares de funciones distintos de  $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$ .

En efecto, sea  $h \in \mathcal{T}$ .

$$\Rightarrow (id_{\mathcal{R}}, h^{-1}), (h^{-1}, id_{\mathcal{R}}) \in \mathcal{T} \times \mathcal{T}$$

Y claramente:  $(id_{\mathcal{R}}, h^{-1}) \neq (h^{-1}, id_{\mathcal{R}})$

$$\text{Pero: } \Phi(id_{\mathcal{R}}, h^{-1}) = \Phi(h^{-1}, id_{\mathcal{R}})$$

$\therefore \Phi$  no puede ser inyectiva.

$$(c) \text{ Set } (f, g) \in \mathcal{T} \times \mathcal{T}.$$

$$\Rightarrow \Phi(f, g) = (f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$

$$\Phi(g^{-1}, f^{-1}) = (g^{-1} \circ f^{-1})^{-1} = (f^{-1})^{-1} \circ (g^{-1})^{-1} = f \circ g$$

$$\Rightarrow \Phi(\Phi(f, g), \Phi(g^{-1}, f^{-1})) = ((g^{-1} \circ f^{-1}) \circ (f \circ g))^{-1}$$

$$= (g^{-1} \circ \text{id}_{\mathcal{R}} \circ g)^{-1}$$

$$= (g^{-1} \circ g)^{-1}$$

$$= (\text{id}_{\mathcal{R}})^{-1}$$

$$= \text{id}_{\mathcal{R}}$$



P3 (a) Estudiamos inyectividad:

$F$  será inyectiva ssi  $\forall p, q \in \mathbb{R}[x] ; p \neq q$   
 $\Rightarrow F(p) \neq F(q)$

Pero esto significa que  $F$  es inyectiva ssi al tomar dos polinomios distintos, entonces la suma de sus coeficientes será distinta.

Para probar que esto es falso, basta considerar:

$$p(x) = x^2 + 2 \quad \wedge \quad q(x) = x^2 + x + 1$$

Y así:

$$F(p) = 3 = F(q)$$

$\therefore F$  no es inyectiva.

(b) Estudiamos sobreyectividad:

$F$  será sobreyectiva ssi  $\forall y \in \mathbb{R}, \exists p \in \mathbb{R}[x] ;$   
 $F(p) = y$

Es decir, queremos ver si podemos escribir cualquier real como la suma de los coeficientes de algún polinomio.

En efecto, dado  $y \in \mathbb{R}$ , basta considerar el polinomio:

$p(x) = y$  (el polinomio cte. igual a  $y$ ) para que se tenga (trivialmente) que  $F(p) = y$ .

$\therefore F$  si es sobreyectiva.

(c) Sea  $p \in \mathbb{R}[x]$ , tal que:  $F(p) = 0$

Es decir:  $\sum_{k=0}^n a_k = 0$  (s.p.g. estamos asumiendo  $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k \cdot x^k$ )

y luego, basta notar que:

$$p(1) = \sum_{k=0}^n a_k \cdot 1^k = \sum_{k=0}^n a_k = 0$$

Para concluir que 1 es raíz de  $p$ .

P4

$$w_n = (1+i)^{4n} + (1-i)^{4n}$$

(a) Sabemos que:

$$(1+i) = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow (1-i) = \sqrt{2} \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

Y luego:

$$w_n = \left( \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} \right)^{4n} + \left( \sqrt{2} \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}} \right)^{4n}$$

$$= \sqrt{2}^{4n} \left( e^{i\pi n} + e^{-i\pi n} \right)$$

Suma de complejos conjugados.

$$= 2^{2n} \cdot 2 \cdot \cos(\pi n)$$

$$= 2^{2n+1} \cdot (-1)^n$$

Y, por lo tanto,  $w_n \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$ .

(b) Usando la parte (a), mostrar que:

$$\sum_{k=0}^n \binom{4n}{4k} - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{4n}{4k+2} = 2^{2n} \cdot (-1)^n$$

Es equivalente a mostrar que:

$$\frac{w_n}{2} = \sum_{k=0}^n \binom{4n}{4k} - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{4n}{4k+2}$$

Usando la fórmula del binomio de Newton:

$$\begin{aligned}W_n &= (1+i)^{4n} + (1-i)^{4n} \\&= \sum_{j=0}^{4n} \binom{4n}{j} i^j + \sum_{j=0}^{4n} \binom{4n}{j} (-i)^j \\&= \sum_{j=0}^{4n} \binom{4n}{j} i^j (1 + (-1)^j)\end{aligned}$$

Y notando que esta suma vale 0 para  $j$  impar, podemos reescribirla como la suma de los términos pares:

$$\begin{aligned}\Rightarrow W_n &= \sum_{l=0}^{2n} \binom{4n}{2l} \cdot i^{2l} \cdot 2, \quad j=2l, l=0, \dots, 2n \\&= 2 \cdot \sum_{l=0}^{2n} \binom{4n}{2l} (-1)^l\end{aligned}$$

Y esta suma la podemos separar en 2 sumas, cuando  $l$  es par y cuando  $l$  es impar:

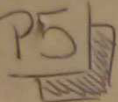
$$\text{Términos pares: } \sum_{k=0}^n \binom{4n}{4k}, \quad l=2k, k=0, \dots, n$$

Términos impares :  $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{4n}{4k+2} (-1)^{k=2k+1}$ ,  $k=0, \dots, n-1$

Y así :  $W_n = 2 \cdot \sum_{k=0}^n \binom{4n}{4k} - 2 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \binom{4n}{4k+2}$

$\Rightarrow \frac{W_n}{2} = \sum_{k=0}^n \binom{4n}{4k} - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{4n}{4k+2}$



P5  Suponemos que  $0 \notin \mathbb{N}$ .

(a) CASO BASE:

$$n=1 \Rightarrow n^3 + 5n = 6, \text{ que es divisible por } 6.$$

PASO INDUCTIVO:

$$\begin{aligned}(n+1)^3 + 5(n+1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 5n + 5 \\ &= n^3 + 5n + 3n^2 + 3n + 6 \\ &= n^3 + 5n + 3(n^2 + n + 2)\end{aligned}$$

$n^3 + 5n$  es div. por 6 por hipótesis de inducción.

Luego, nos basta probar que:

$n^2 + n + 2$  es divisible por 2, o bien, que  
 $n^2 + n + 2$  es par,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

En efecto, si  $n$  es par:

$$\Rightarrow n^2 \text{ es par} \Rightarrow n^2 + n + 2 \text{ es par.}$$

Y si  $n$  es impar:

$$\begin{aligned}\Rightarrow n^2 \text{ es impar} &\Rightarrow n^2 + n \text{ es par} \\ &\Rightarrow n^2 + n + 2 \text{ es par.}\end{aligned}$$

Con lo que se concluye el resultado pedido. 

(b) CASO BASE:

$$n=1 \Rightarrow 5^{2+1} + 7^{2+1} = 125 + 343 = 468$$

que es divisible por 6.

PASO INDUCTIVO:

$$\begin{aligned} 5^{2(n+1)+1} + 7^{2(n+1)+1} &= 5^{2n+1+2} + 7^{2n+1+2} \\ &= 25 \cdot 5^{2n+1} + 49 \cdot 7^{2n+1} \\ &= 25 \cdot (5^{2n+1} + 7^{2n+1}) + 24 \cdot 7^{2n+1} \end{aligned}$$

Por hipótesis, sabemos que:  $5^{2n+1} + 7^{2n+1}$ , es div. por 6.

$$\Rightarrow 25(5^{2n+1} + 7^{2n+1}) \text{ es div. por 6.}$$

X, por otra parte: 24 es div. por 6

$$\Rightarrow 24 \cdot 7^{2n+1} \text{ es div. por 6.}$$

$$\therefore 25(5^{2n+1} + 7^{2n+1}) + 24 \cdot 7^{2n+1} \text{ es div. por 6.}$$



(c) CASO BASE:

$$n=1 \Rightarrow (x^n - y^n) = (x - y), \text{ que es div. por } (x - y)$$

PASO INDUCTIVO:

$$\begin{aligned}(x^{n+1} - y^{n+1}) &= x^n \cdot x - y^n \cdot y \\&= x^n \cdot x - x^n \cdot y + x^n \cdot y - y^n \cdot y \\&= x^n(x - y) + y(x^n - y^n)\end{aligned}$$

$x^n(x - y)$  es claramente divisible por  $(x - y)$ ; y  
 $y \cdot (x^n - y^n)$  es divisible por  $(x - y)$ , pues  $(x^n - y^n)$   
lo es por hipótesis.

Así,  $x^n(x - y) + y(x^n - y^n)$  es divisible por  $(x - y)$ .

(d) CASO BASE:

Para  $n=1$ , es claro que:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} = 1 \leq 2\sqrt{1} = 2$$

PASO INDUCTIVO:

Debemos probar que:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2\sqrt{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n+1}$$

Usando como hipótesis que:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$= \frac{2\sqrt{n(n+1)} + 1}{\sqrt{n+1}}$$

Por la transitividad nos basta probar que:

$$\frac{2\sqrt{n(n+1)} + 1}{\sqrt{n+1}} \leq 2\sqrt{n+1}$$

$$\sqrt{n+1} \geq 2$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{n(n+1)} + 1 \leq 2(n+1)$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{n(n+1)} \leq 2n+1$$

$(\ )^2$  es creciente  
en  $\mathbb{R}^+$

$$\Leftrightarrow 4n^2 + 4n \leq 4n^2 + 4n + 1$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 1$$

Y así, se concluye el resultado pedido. 

(e) CASO BASE:

$$n=1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k (2k+1) = \sum_{k=1}^2 (-1)^k (2k+1) \quad \text{de. en } \mathbb{R}$$
$$= -3 + 5 = 2 \cdot 1 = 2 \cdot n$$

PASO INDUCTIVO:

$$\sum_{k=1}^{2(n+1)} (-1)^k (2k+1) = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k (2k+1) + (-1)^{2n+1} (4n+3) + (-1)^{2n+2} (4n+5)$$
$$= \overset{\text{hip. de inducción}}{2 \cdot n} - 4n - 3 + 4n + 5$$
$$= 2n + 2$$
$$= 2(n+1)$$

P6 (a) Dividamos:

$$\begin{array}{r} x^5 + ax^2 + b : x^3 + x^2 + cx + 1 = x^2 - x + (1-c) \\ - (x^5 + x^4 + cx^3 + x^2) \\ \hline -x^4 - cx^3 + (a-1)x^2 + b \\ - (-x^4 - x^3 - cx^2 - x) \\ \hline (1-c)x^3 + (a+c-1)x^2 + x + b \\ - ((1-c)x^3 + (1-c)x^2 + (1-c)cx + (1-c)) \\ \hline (a+2c-2)x^2 + (c^2-c+1)x + b+c-1 \end{array}$$

Pero como  $q$  divide a  $P$ , el resto de esta división debe ser 0. Luego:

$$\left. \begin{array}{l} a+2c-2=0 \\ c^2-c+1=0 \\ b+c-1=0 \end{array} \right\}$$

Y sólo falta resolver este sistema de ecuaciones para determinar los valores de  $a, b$  y  $c$ ; lo que queda propuesto para el lector.

(b)  $A = (-2, 0)$ ,  $B = (0, 4)$ ,  $C = (1, 3)$ ,  $D = (2, 16)$ .

Podemos suponer:

$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ , con  $a, b, c, d$  des. a determinar.

Para que el gráfico de  $p$  contenga a  $A, B, C$  y  $D$ , debe tenerse que:

$$p(-2) = 0 \quad \wedge \quad p(0) = 4 \quad \wedge \quad p(1) = 3 \quad \wedge \quad p(2) = 16$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} -8a + 4b - 2c + d = 0 \\ d = 4 \\ a + b + c + d = 3 \\ 8a + 4b + 2c + d = 16 \end{array} \right\}$$

Y este sistema de ecuaciones nos entrega los valores de  $a, b, c$  y  $d$  que definen completamente a nuestro polinomio  $p$ .

Resolver este sistema también queda propuesto para el lector.

P7 (a) Debemos probar que  $R^*$  es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Reflexiva: Sea  $(a, b) \in A \times A$ .

Como  $R$  es de orden, en particular, es reflexiva.

$$\Rightarrow a R a \wedge b R b \Rightarrow (a, b) R^* (a, b)$$

Es decir:  $\forall (a, b) \in A \times A: (a, b) R^* (a, b)$ .

$\therefore R^*$  es reflexiva.

Antisimétrica: Sean  $(a, b), (a', b') \in A \times A$ , tales que:

$$(a, b) R^* (a', b') \wedge (a', b') R^* (a, b)$$

$$\Rightarrow (a R a') \wedge (b R b') \wedge (a' R a) \wedge (b' R b)$$

$$\Rightarrow \underbrace{(a R a') \wedge (a' R a)}_{a=a'} \wedge \underbrace{(b R b') \wedge (b' R b)}_{b=b'}$$

pues  
 $R$  es  
antisimétrica  $\Rightarrow$

$$a = a'$$

$$b = b'$$

Es decir:  $\forall (a, b), (a', b') \in A \times A;$

$$(a, b) R^* (a', b') \wedge (a', b') R^* (a, b) \Rightarrow a = a' \wedge b = b'$$

$$\Leftrightarrow (a, b) = (a', b')$$

$\therefore R^*$  es antisimétrica.

TRANSITIVA: Sean  $(a, b), (a', b'), (a'', b'') \in A \times A$ , tales que:

$$\begin{aligned} & (a, b) R^* (a', b') \wedge (a', b') R^* (a'', b'') \\ \Rightarrow & (a R a') \wedge (b R b') \wedge (a' R a'') \wedge (b' R b'') \\ \Rightarrow & \underbrace{(a R a') \wedge (a' R a'')}_{\Rightarrow (a R a'')} \wedge \underbrace{(b R b') \wedge (b' R b'')}_{\Rightarrow (b R b'')} \\ \Rightarrow & (a R a'') \wedge (b R b'') \\ \Rightarrow & (a, b) R^* (a'', b'') \end{aligned}$$

pues  $R$  es transitiva. Es decir:  $\forall (a, b), (a', b'), (a'', b'') \in A \times A$ ;

$$\begin{aligned} & (a, b) R^* (a', b') \wedge (a', b') R^* (a'', b'') \\ \Rightarrow & (a, b) R^* (a'', b'') \end{aligned}$$

$\therefore R^*$  es transitiva.

$\therefore R$  es relación de orden (pues es reflexiva, antisimétrica y transitiva). 

(b) Sean  $(a, b), (a', b') \in A \times A$ .

Que  $R$  sea un orden total nos dice que:

$$(a R a' \vee a' R a) \quad (b R b' \vee b' R b)$$

De manera que perfectamente podría ocurrir que:

$$(a R a') \wedge (b' R b)$$

Pero

$$(a' R a) \wedge (b R b').$$

Si esto ocurriese, entonces:

$$(a, b) R^*(a', b') \Leftrightarrow (a R a') \wedge (b R b') \Leftrightarrow V \wedge F \Leftrightarrow F$$

$$(a', b') R^*(a, b) \Leftrightarrow (a' R a) \wedge (b' R b) \Leftrightarrow F \wedge V \Leftrightarrow F$$

Y de esta manera:

$$(a, b) R^*(a', b') \wedge (a', b') R^*(a, b)$$

$\therefore R$  es sólo un orden parcial. 

(c) Debemos probar que  $R^*$  es reflexiva, simétrica y transitiva.

Reflexión y transitividad es directo de la parte (a) (aún suponemos  $R$  reflexiva y transitiva).

Luego, nos basta probar que  $R^*$  es simétrica.

Sean  $(a, b), (a', b') \in A \times A$ , tales que:

$$(a, b) R^*(a', b') \Rightarrow (a R a') \wedge (b R b')$$

pues  $R$  es simétrica  $\Rightarrow (a' R a) \wedge (b' R b)$

$$\Rightarrow (a', b') R^*(a, b)$$

$$\therefore \forall (a, b), (a', b') \in A \times A; (a, b) R^*(a', b') \Rightarrow (a', b') R^*(a, b)$$

$\therefore R^*$  es simétrica.

$\therefore R^*$  es de equivalencia. (pues es reflexiva, simétrica y transitiva).

$$(d) \text{ Sea } (a, b) \in A \times A.$$

$$\text{Sea } (a', b') \in [(a, b)]_{\mathcal{R}^*}$$

$$\Leftrightarrow (a', b') \mathcal{R}^* (a, b)$$

$$\Leftrightarrow (a' \mathcal{R} a) \wedge (b' \mathcal{R} b)$$

$$\Leftrightarrow a' \in [a]_{\mathcal{R}} \wedge b' \in [b]_{\mathcal{R}}$$

$$\Leftrightarrow (a', b') \in [a]_{\mathcal{R}} \times [b]_{\mathcal{R}}.$$

$$\therefore [(a, b)]_{\mathcal{R}^*} = [a]_{\mathcal{R}} \times [b]_{\mathcal{R}} \quad \blacksquare$$