MA1101-1 - Introducción al Álgebra **25.07.2013**

Auxiliares 14 y 15

Profesor: *Pablo Dartnell* Auxiliar: *Leonel Huerta*

P1. (a) Determine todas las raíces del polinomio $p(x) = x^5 - 2x^3 - 2x^2 - 3x - 2$. Factorícelo en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$.

(b) Sabiendo que el polinomio:

$$p(z) = z^4 - 4z^3 + 10z^2 - 12z + 8$$

posee sólo raíces complejas y que una de ellas tiene módulo $\sqrt{2}$, encuentre todas las raíces del polinomio.

P2. Considere el conjunto $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ es biyectiva}\}$. Se define la función: $\Phi : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$ dada por $\Phi(f, g) = (f \circ g)^{-1},\ \forall (f, g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}$.

(a) Justifique que $\Phi(f, g) \in \mathcal{F},\ \forall (f, g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}$.

(b) Pruebe que Φ es epiyectiva, pero no inyectiva.

(c) Demuestre que $\Phi(\Phi(f, g), \Phi(g^{-1}, f^{-1})) = id_{\mathbb{R}},\ \forall (f, g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}$.

P3. Considere la función $F : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$ definida $\forall p \in \mathbb{R}[x]$ de la forma $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ como:

$$F(p) = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

es decir, la función que suma todos los coeficientes del polinomio p.

(a) Estudie la inyectividad de F.

(b) Estudie la sobreyectividad de F.

(c) Si $F(p) = 0$, indique una raíz de p.

P4. Sea $n \in \mathbb{N}$. Se define el complejo:

$$w_n = (1 + i)^{4n} + (1 - i)^{4n}$$

(a) Demuestre que: $w_n \in \mathbb{R}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) Recuerde la fórmula del binomio de Newton para deducir que:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{4n}{4k}-\sum_{k=0}^{n-1}\binom{4n}{4k+2}=2^{2n}(-1)^{n}$$

P5. Elija sólo 3 de las siguientes afirmaciones y pruebe por inducción:

(a) $\forall n \in \mathbb{N}$, n^3+5n es divisible por 6.

(b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $5^{2n+1}+7^{2n+1}$ es divisible por 6.

(c) $\forall n \in \mathbb{N}$, (x^n-y^n) es divisible por $(x-y)$.

(d) $\forall n \in \mathbb{N}$, $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2\sqrt{n}$

(e) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k(2k+1)=\alpha n$. Determine el valor de la constante $\alpha \in \mathbb{R}$.

P6. (a) Determine los valores de a, b, c para que: $p \in \mathbb{C}[x]$, dado por $p(x)=x^5+ax^2+b$, sea divisible por $q(x)=x^3+x^2+cx+1$.

(b) Dados los puntos $A=(-2,0), B=(0,4), C=(1,3)$ y $D=(2,16)$, encuentre el polinomio $p(x)$ con $gr(p) \leq 3$ cuyo gráfico contenga a dichos 4 puntos.

P7. Sea $A \neq \phi$ un conjunto y $\mathcal{R}$ una relación en A. Se define la relación $\mathcal{R}^*$ en $A \times A$ por:

$$(a,b)\mathcal{R}^*(a',b') \Leftrightarrow (a\mathcal{R}a') \wedge (b\mathcal{R}b').$$

(a) Demuestre que si $\mathcal{R}$ es de orden, entonces $\mathcal{R}^*$ también lo es.

(b) Muestre que si A tiene al menos dos elementos y $\mathcal{R}$ es un orden total, entonces R^* es sólo un orden parcial.

(c) Demuestre que si $\mathcal{R}$ es de equivalencia, entonces $\mathcal{R}^*$ también lo es.

(d) Para $(a,b) \in A \times A$, demuestre que:

$$[(a,b)]_{\mathcal{R}^*}=[a]_{\mathcal{R}} \times [b]_{\mathcal{R}}$$