P1) (a) Escribamos z_0 en su forma polar:

$$z_0 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} \frac{(1+i\sqrt{3})}{(1+i\sqrt{3})} = \frac{1+2\sqrt{3}i-3}{1+3} = \frac{-2+2\sqrt{3}i}{4}$$

$$= \frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{3}i\right) \Rightarrow |z_0| = \frac{1}{2}\sqrt{1+3} = 1$$

$$\theta_{z_0} = \arctan\left(1/\sqrt{3}\right) + \pi/2 = \frac{2}{3}\pi$$

$$\therefore z_0 = e^{i\frac{2}{3}\pi}$$

Llamando ω_k a las raíces cuartas de z_0, debe tenerse:

$$\omega_k^4 = e^{i\frac{2}{3}\pi} \quad , \text{ con } k \in \{0,1,2,3\}$$

$$\Leftrightarrow |\omega_k|\left(e^{i\theta}\right)^4 = e^{i\frac{2}{3}\pi}$$, donde $|\omega_k|$ es el módulo de ω_k y θ su argumento.

$$\Rightarrow |\omega| = 1 \quad \wedge$$

$$\left(e^{i\theta}\right)^4 \cdot \left(e^{-i\frac{2}{3}\pi\frac{1}{4}}\right)^4 = 1$$

$$\Rightarrow \left(e^{i(\theta-\pi/6)}\right)^4 = 1$$

$$\therefore \theta - \frac{\pi}{6} = \frac{2k\pi}{3} \Leftrightarrow \theta = \frac{4k\pi+\pi}{6}$$

Y así:

$$\omega_k = e^{\frac{i\pi}{6}(4k+1)} \quad , \text{ con } k \in \{0,1,2,3\}$$

(b)(i)

$$(\omega_k)^j = \left(e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^j = \left(e^{i\frac{2j\pi}{n}}\right)^k = (\omega_j)^k$$

(ii) $$(\omega_k)^{-j} = \left(e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^{-j} = e^{-i\frac{2k\pi j}{n}} = \overline{\left(e^{i\frac{2k\pi j}{n}}\right)} = \overline{\left(e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^j} = \overline{(\omega_k^j)}$$

(iii) Si $j=h$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k^j \cdot \omega_k^{-h} = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k^j \cdot \omega_k^{-j} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^j \left(e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^{-j} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^0 = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n$$

Si $j \neq h$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k^j \, \omega_k^{-h} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^{j-h} = \sum_{k=0}^{n-1} (\omega_k)^{j-h} \overset{\text{parte (i)}}{=} \sum_{k=0}^{n-1} (\omega_{j-h})^k$$

$$\overset{\text{suma geométrica}}{=} \frac{1-(\omega_{j-h})^{n-1+1}}{\underbrace{1-\omega_{j-h}}_{\neq 0}} = 0$$, pues (ω_{j-h}) es raíz n-ésima de la unidad

(iv) Apunte ... (IMPORTANTE!)

(v) $$\prod_{k=0}^{n-1} \omega_k = \prod_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}} = e^{\sum_{k=0}^{n-1} i\frac{2k\pi}{n}} = e^{i\frac{2\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} k}$$

$$= e^{i\frac{2\pi}{n}\frac{n(n-1)}{2}} = e^{i\pi(n-1)} = (-1)^{n-1}$$

P2

(a) $f: \mathbb{Z}_n \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$, morfismo

Luego: $\forall [x]_n, [y]_n \in \mathbb{Z}_n$

$$f([x]_n +_n [y]_n) = f([x]_n) \cdot f([y]_n)$$

Sea $[k]_n \in \mathbb{Z}_n$, y s.p.g, digamos que $k \in \{0, \dots, n-1\}$

$$\Rightarrow f([k]_n) = f(\underbrace{[1]_n +_n [1]_n +_n \dots +_n [1]_n}_{k \text{ veces}})$$

$$= \underbrace{f([1]_n) \cdot f([1]_n) \cdots f([1]_n)}_{k \text{ veces}} = f([1]_n)^k$$

Como f es morfismo*, sabemos que: (morfismo entre grupos!)

$$f([0]_n) = 1$$

Pero además: $[0]_n = [n]_n$

Luego:

$$f([0]_n) = f([n]_n) = (f([1]_n))^n = 1$$

Y por lo tanto, $f([1]_n)$ debe ser raíz n-ésima de la unidad.

(b) Veamos que f está bien definida.

Sean $k_1, k_2 \in [k]_n$.

Queremos ver que

$$f([k_1]_n) = f([k_2]_n)$$

En efecto, como $k_1, k_2 \in [k]_n$

$$\Rightarrow \exists\, z \in \mathbb{Z} \; ; \; k_2 = k_1 + n \cdot z$$

Luego $f([k_1]_n) = f([k_2]_n)$

$$\Longleftrightarrow \omega^{k_1} = \omega^{k_2} = \omega^{k_1 + n \cdot z}$$

Y como ω es raíz n-ésima, sabemos que es de la forma:

$$\omega = e^{i\theta},$$

Y así $\omega^{k_1} = \omega^{k_1 + n \cdot z}$

$$\Longleftrightarrow (e^{i\theta})^{k_1} = (e^{i\theta})^{k_1 + nz} = (e^{i\theta})^{k_1} \cdot (e^{i\theta})^{n \cdot z}$$

Que es cierto, pues ω es raíz n-ésima de la unidad.

Veamos que f es morfismo.

En efecto, sean $[k_1]_n, [k_2]_n \in \mathbb{Z}_n$.

$$\Rightarrow f([k_1]_n +_n [k_2]_n) = \omega^{k_1+k_2}$$

Podemos escribir:

$$\omega = e^{i\theta}$$

Y así, usando Moivre:

$$\omega^{k_1+k_2} = (e^{i\theta})^{k_1+k_2} = e^{i\theta k_1 + i\theta k_2}$$

$$= (e^{i\theta})^{k_1} \cdot (e^{i\theta})^{k_2} = f([k_1]_n) f([k_2]_n)$$

Con lo que f es morfismo. ■

(c) De la parte (a) tenemos que a cada morfismo en M_n, se le puede "asociar" a una raíz en Ω_n. En otras palabras, existe una inyección de M_n en Ω_n; y así: $|M_n| \leq |\Omega_n|$.

Análogamente, de la parte (b) se obtiene que $|\Omega_n| \leq |M_n|$. (Pruebe que efectivamente son inyecciones!)

Luego, usando el Teorema de Schröder-Bernstein se concluye lo pedido ■

P3 (a)

$$\frac{z_1\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)}{z_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)} = \frac{3\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}\overbrace{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)}^{z_3}}{2\cdot e^{i\frac{\pi}{2}}\underbrace{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)}_{z_4}} = z_5$$

Escribamos z_3 y z_4 en su forma polar, así:

$$z_3 = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$z_4 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = e^{i\frac{3}{4}\pi}$$

Luego

$$z_5 = \frac{3\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}}{2\cdot e^{i\frac{\pi}{2}}\cdot e^{i\frac{3}{4}\pi}} = \frac{3}{2\sqrt{2}}\cdot e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}-\frac{3}{4}\pi\right)}$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{4}\cdot e^{-i\frac{3}{4}\pi}$$ Forma polar

$$\Rightarrow z_5 = \frac{3\sqrt{2}}{4}\left(\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) - i\cdot\operatorname{Sen}\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right)$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{4}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \frac{3}{4}\left(-1-i\right)$$

$$= -3/4 - 3/4\, i$$ Forma $a+bi$

(b) Notemos que:

$$z_0 z_1 + z_1 z_2 + \ldots + z_{n-2} \cdot z_{n-1} + z_{n-1} z_0 =$$

$$= z_0 \cdot z_1 + z_1 \cdot z_2 + \ldots + z_{n-2} \cdot z_{n-1} + z_{n-1} z_n$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} z_k \cdot z_{k+1}$$

Pero, en la P1 vimos que:

$$z_k = z_1^k$$

Luego:

$$\sum_{k=0}^{n-1} z_k z_{k+1} \overset{P1}{=} \sum_{k=0}^{n-1} z_1^k \cdot z_1^{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} z_1^{2k} \cdot z_1$$

$$= z_1 \sum_{k=0}^{n-1} (z_1^2)^k \overset{P.G.}{=} z_1 \cdot \frac{\left(1-(z_1^2)^{n-1+1}\right)}{1-z_1^2}$$

$$= \frac{z_1}{1-z_1^2} \cdot \left(1-(z_1^n)^2\right) = 0$$

Pues z_1 es raíz n-ésima de la unidad.

Lo que prueba el resultado pedido. ■