MA1101-1 - Introducción al Álgebra **23.07.2013**

Auxiliar 13

Profesor: *Pablo Dartnell* Auxiliar: *Leonel Huerta*

P1. (a) Exprese en la forma $a+bi$ las raíces cuartas de $z_o = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$.

(b) Sea $n \in \mathbb{N}$ y w_k las raíces n-ésimas de la unidad. Pruebe que para $h, k, j = 0, 1, ..., n-1$ se tiene que:

(i) $(w_k)^j = (w_j)^k$

(ii) $(w_k)^{-j} = \overline{(w_k)^j}$

(iii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} w_k^j w_k^{-h} = \begin{cases} n \ , & j = h \\ 0 \ , & j \neq h \end{cases}$

(iv) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} w_k = 0$

(v) $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} w_k = (-1)^{n-1}$

P2. Sea Ω_n el conjunto que contiene las n-ésimas raíces de la unidad, y sea M_n el conjunto que contiene todos los morfismos entre $(\mathbb{Z}_n, +)$ y $(\mathbb{C}\backslash\{0\}, \cdot)$.

El objetivo de este problema es mostrar que: $|\Omega_n| = |M_n|$.

Para esto, siga los siguientes pasos:

(a) Sea $f : \mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{C}\backslash\{0\}$ un morfismo.

Muestre que $f([k]) = f([1])^k$, y deduzca que $f([1])$ es raíz n-ésima de la unidad.

(b) Recíprocamente, muestre que si w es raíz n-ésima de la unidad, entonces $f : \mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{C}\backslash\{0\}$ dada por $f([k]) = w^k$ está bien definida y es un morfismo.

(c) Concluya.

P3. *Control 6, 2011*

(a) Escriba en forma cartesiana y polar el complejo:

$$\frac{z_1(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)}{z_2(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i)}$$

donde: $|z_1| = 3, |z_2| = 2, \arg z_1 = \frac{\pi}{4}, \arg z_2 = \frac{\pi}{2}$.

(c) Sean $z_0, ..., z_{n-1}$ las n raíces n-ésimas de la unidad, ordenadas de manera usual (es decir, según argumento creciente). Demuestre que:

$$z_0z_1 + z_1z_2 + ... + z_{n-2}z_{n-1} + z_{n-1}z_0 = 0$$

. **Indicación:** Le puede ser útil hacer primero el caso $n = 3$.