

P11 (a) Veamos que $(\mathbb{R}, *, \cdot)$ es un cuerpo.

Es decir, veamos que:

*₁: $(\mathbb{R}, *)$ es grupo abeliano.

₂: $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ es grupo abeliano. (0 es el neutro para $$!)

₃: distribuye con respecto a $$.

Problemas *₁. Es decir, veamos que:

• *_{1.1}: $*$ Asocia en $\mathbb{R}$.

{1.2}: Existe 0 , neutro para $*$, en $\mathbb{R}$.

{1.3}: Todo elemento $x \in \mathbb{R}$ posee inverso (para $$) $x*^{-1} \in \mathbb{R}$.

_{1.4}: $$ conmuta en $\mathbb{R}$.

En efecto, sean $x, y, z \in \mathbb{R}$. Luego, se tiene que:

$$\begin{aligned} x * (y * z) &= x * \sqrt[3]{y^3 + z^3} \\ &= \sqrt[3]{x^3 + y^3 + z^3} \\ &= \sqrt[3]{x^3 + y^3} * z = (x * y) * z \quad (*_{1.1}) \end{aligned}$$

Además: $x * y = y * x \quad (*_{1.4})$

Pues esto es equivalente a $\sqrt[3]{x^3 + y^3} = \sqrt[3]{y^3 + x^3}$

Por otra parte, notemos que:

$$x * 0 \stackrel{(*_{1.4})}{=} 0 * x = \sqrt[3]{0 + x^3} = x$$

Es decir, $0_* = 0$ es el neutro para $*$ en $\mathbb{R}$. ($*_{1.2}$)

Falta ver que, dado $x \in \mathbb{R}$, $\exists x_*^{-1} \in \mathbb{R}$, su inverso.

Parece tener sentido que: $x_*^{-1} = -x$

En efecto:

$$x * (-x) \stackrel{(*_{1.4})}{=} (-x) * x = \sqrt[3]{-x^3 + x^3} = \sqrt[3]{0} = 0. \quad (*_{1.3})$$

Y, por lo tanto, $(\mathbb{R}, *)$ es grupo abeliano. ($*_1$)

Problemas $*_2$.

Esto es gratis, pues: $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot) = (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ y como $\cdot$ es la multiplicación usual, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ es conocido grupo abeliano. ($*_2$)

Nos falta probar $*_3$:

Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$, luego, se tiene que:

$$\begin{aligned} x \cdot (y * z) &= x \cdot \sqrt[3]{y^3 + z^3} \\ &= \sqrt[3]{x^3 y^3 + x^3 z^3} \\ &= \sqrt[3]{(x \cdot y)^3 + (x \cdot z)^3} = (x \cdot y) * (x \cdot z) \end{aligned}$$

Análogamente: $(y * z) \cdot x = (y \cdot x) * (z \cdot x)$ ($*_3$)

Luego, por todo lo anterior ($*_1, *_2, *_3$) se concluye que $(\mathbb{R}, *, \cdot)$ es un cuerpo. 

(b) f es claramente biyectiva. Luego, basta probar que f es morfismo de $(\mathbb{R}, *, \cdot)$ en $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

Es decir, basta probar que:

•₁ f es morfismo de $(\mathbb{R}, *)$ en $(\mathbb{R}, +)$.

•₂ f es morfismo de $(\mathbb{R}, \cdot)$ en $(\mathbb{R}, \cdot)$.

Veamos •₁.

• Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Luego:

$$f(x * y) = f(\sqrt[3]{x^3 + y^3}) = x^3 + y^3 = f(x) + f(y)$$

Lo que prueba •₁.

Veamos ahora •₂.

Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Luego:

$$f(x \cdot y) = (x \cdot y)^3 = x^3 \cdot y^3 = f(x) \cdot f(y)$$

• Lo que prueba •₂.

$\therefore f$ es isomorfismo de $(\mathbb{R}, *, \cdot)$ en $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.



P2 Veamos que $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ es anillo conmutativo con unidad, esto es, veamos que:

*₁: $(\mathbb{R}^2, \oplus)$ es grupo abeliano.

*₂: $\odot$ asocia en $\mathbb{R}^2$.

*₃: $\odot$ distribuye respecto de $\oplus$.

*₄: Existe neutro para $\odot$ en $\mathbb{R}^2$.

*₅: $\odot$ conmuta en $\mathbb{R}^2$.

Sabemos que $(\mathbb{R}^2, \oplus)$ es grupo abeliano. Luego, basta probar que se tiene: *₂, *₃, *₄ y *₅.

Probemos *₂. Sean $(a,b), (c,d), (e,f) \in \mathbb{R}^2$. Luego:

$$\begin{aligned}(a,b) \odot [(c,d) \odot (e,f)] &= (a,b) \odot (c \cdot e, d \cdot f) \\ &= (a \cdot c \cdot e, b \cdot d \cdot f) \\ &= (a \cdot c, b \cdot d) \odot (e, f) \\ &= [(a,b) \odot (c,d)] \odot (e,f).\end{aligned}$$

Lo que prueba *₂.

Probemos *₅. Sean $(a,b), (c,d) \in \mathbb{R}^2$. Entonces:

$$\begin{aligned}(a,b) \odot (c,d) &= (a \cdot c, b \cdot d) = (c \cdot a, d \cdot b) \\ &= (c,d) \odot (a,b)\end{aligned}$$

Es decir, $\odot$ conmuta. (*₅)

Problemas ahora *3. Sean $(a,b), (c,d), (e,f) \in \mathbb{R}^2$. Luego:

$$\begin{aligned}(a,b) \odot [(c,d) \oplus (e,f)] &= (a,b) \odot (c+e, d+f) \\ &= (a(c+e), b(d+f)) \\ &= (ac+ae, bd+bf) \\ &= (ac, bd) \oplus (ae, bf) \\ &= [(a,b) \odot (c,d)] \oplus [(a,b) \odot (e,f)]\end{aligned}$$

• Y análogamente:

$$[(c,d) \oplus (e,f)] \odot (a,b) = [(c,d) \odot (a,b)] \oplus [(e,f) \odot (a,b)]$$

Lo que prueba *3.

Veamos, por último, *4.

Parece tener sentido que $(1,1) \in \mathbb{R}^2$ sea el neutro para $\odot$.
En efecto, dado $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, se tiene que:

$$(1,1) \odot (x,y) \stackrel{(*)}{=} (x,y) \odot (1,1) = (x \cdot 1, y \cdot 1) = (x,y)$$

Y por lo tanto, existe neutro para $\odot$ en $\mathbb{R}^2$. (*4)

∴ Por todo lo anterior se concluye que

$(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ es anillo conmutativo con unidad.

(b) Basta notar que: $(234, 0), (0, 7) \in \mathbb{R}^2$,

son tales que:

$$(234, 0) \odot (0, 7) = (0, 0)$$

Pero $(234, 0), (0, 7) \neq (0, 0)$

Es decir: $(234, 0), (0, 7)$ son divisores de cero!

(Y todos los elementos de $\mathbb{R}^2$ que tengan un cero en alguna de sus componentes y algún real, distinto de cero, en la otra).

Lo que prueba existencia de div. de cero.

¿Tiene sentido pensar que $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ es un cuerpo?

No! Pues si lo fuera, no podrían tener divisores de cero. (RAZONAMIENTO típico).

(c) RAZONANDO por contradicción, supongamos que $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ si es isomorfo a $(\mathbb{C}, +, \cdot)$. Luego, existe un isomorfismo, digamos f , de $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ en $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

Sean $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$, divisores de cero, es decir, tales que:

$$\vec{x} \odot \vec{y} = (0, 0) \quad , \quad \text{pero } \vec{x}, \vec{y} \neq (0, 0) \in \mathbb{R}^2$$

$$\Rightarrow f(\vec{x} \odot \vec{y}) = f(0, 0) \Leftrightarrow f(\vec{x}) f(\vec{y}) = (0, 0) \in \mathbb{C}$$

Y como $f(\vec{x}), f(\vec{y}) \in \mathbb{C}$ y son no nulos, ellos son divisores de cero en $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

~~$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ es cuerpo.~~

$\therefore (\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ NO puede ser isomorfo a $(\mathbb{C}, +, \cdot)$

P36 (a) Veamos que ab es un div. de cero.

Como sabemos que $ab \neq 0$, nos basta probar que

$$\exists y \in A, \text{ con } y \neq 0 \text{ t.q.}$$

$$(a \cdot b) \cdot y = 0$$

En efecto, como a es div. de cero: $\exists z \in A \text{ t.q.}$

$$a \cdot z = 0, \text{ donde } z \neq 0$$

$$\bullet \Rightarrow b \cdot a \cdot z = 0 \quad (\text{Operando por } b \text{ y usando que } b \cdot 0 = 0)$$

$$\Rightarrow (a \cdot b) \cdot z = 0 \quad (\text{A anillo conmutativo})$$

Con lo que se concluye que ab es div. de cero. 

(b) Sean $a, b \in A$ tales que ab es div. de cero, es

$\bullet$ decir, $\exists y \in A, y \neq 0$, tal que

$$(a \cdot b) \cdot y = 0 \quad (*)$$

Notemos que como $(a \cdot b)$ es div. de cero, entonces: $(a \cdot b) \neq 0$

Luego: $a \neq 0 \wedge b \neq 0$.

Volvamos ahora a $(*)$. Sea $y \in A \setminus \{0\}$ tal que se tenga la igualdad, luego: ~~quedo~~

$$(a \cdot b) \cdot y = 0$$

$$\Rightarrow a \cdot (b \cdot y) = 0 \quad (\text{Asociando})$$

De donde se obtiene que: $a, (b \cdot y)$ son divisores de cero, o bien, $b \cdot y = 0$. (Gracias a que $a \neq 0$).

Si $a, (b \cdot y)$ son divisores de cero, se concluye, pues a es div. de cero.

En caso contrario, es decir, si $b \cdot y = 0$:

Como $b, y \neq 0 \Rightarrow b, y$ son div. de cero, con lo que se concluye, pues b es div. de cero.

Por lo tanto, si $(a \cdot b)$ es div. de cero, entonces: a es div. de cero

b es $\checkmark$ div. de cero.

Que es lo que se quería demostrar.

Estudien!

