MA1101-1 - Introducción al Álgebra

29.05.2013

Auxiliar 10

Profesor: *Pablo Dartnell*

Auxiliar: *Leonel Huerta*

P1. (a) Considere el conjunto: $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es biyectiva}\}$. Es decir, $\mathcal{F}$ es el conjunto de todas las funciones biyectivas que van de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

Muestre que $(\mathcal{F}, \circ)$, donde $\circ$ es la composición de funciones, es un grupo.

(b) Considere ahora el conjunto $\mathcal{L} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es lineal o afín no constante}\}$. Es decir, $\mathcal{L}$ es el conjunto de todas las funciones lineales biyectivas que van de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

Muestre que $(\mathcal{L}, \circ)$, donde $\circ$ es la composición de funciones, es un subgrupo de $\mathcal{F}$.

Indicación: Trabaje con dos funciones arbitrarias de $\mathcal{L}$. Es decir, trabaje con: $f_{a,b}, g_{c,d} \in \mathcal{L}$ definidas por: $f_{a,b}(x) = ax + b$ y $g_{c,d}(x) = cx + d$, donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ con $a, c \neq 0$.

P2. (a) Sea $(G, *)$ un grupo y $f : G \rightarrow G$ la función definida por $f(g) = g^{-1}$ para cada $g \in G$ (recordar que g^{-1} es el inverso de g para la operación $*$). Probar que:

f es un isomorfismo $\Leftrightarrow G$ es un grupo abeliano.

(b) Considere $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ con la operación definida por: $(a, b) \oplus (c, d) = (a +_2 c, b +_3 d)$.

(i) Pruebe que $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, \oplus)$ es un grupo.

(ii) Construya un isomorfismo:

$$f : (\mathbb{Z}_6, +_6) \rightarrow (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, \oplus)$$

tal que: $f([1]_6) = ([1]_2, [1]_3)$.

(iii) Concluya que el isomorfismo de (ii) es único.

P3. *Control 5, 2009*

(a) Sea $(G, *)$ un grupo abeliano y $H, K \subseteq G$ dos subgrupos de G . Probar que el conjunto

$$H * K = \{h * k \mid h \in H, k \in K\}$$

es subgrupo de $(G, *)$.

(b) Sea $(G, *)$ un grupo finito de orden 4, es decir $|G| = 4$, con neutro $e \in G$.

Pruebe que $\forall a \in G \setminus \{e\}, a^3 \neq e$ ($a^3 = a * a * a$).

Indicación: Argumente por contradicción y use el Teorema de Lagrange.

P4. Propuesto

Sea $(G, *)$ un grupo no necesariamente abeliano con neutro e .

(a) Para $a \in G$, se define la función $h_a : G \rightarrow G$ tal que $h_a(x) = a * x * a^{-1}$ (a^{-1} es el inverso de a en G).

Pruebe que $\forall a \in G, h_a$ es un isomorfismo de $(G, *)$ en $(G, *)$.

(b) Se definen los conjuntos $A = \{f : G \rightarrow G \mid f \text{ es un isomorfismo de } (G, *) \text{ en } (G, *)\}$ y $B = \{g : G \rightarrow G \mid g \text{ es biyectiva}\}$.

Demuestre que $(A, \circ)$ es subgrupo de $(B, \circ)$, donde $\circ$ es la composición de funciones.

(c) Pruebe que la función $\varphi : (G, *) \rightarrow (A, \circ)$ definida por: $\varphi(a) = h_a$ para cada $a \in A$, es un homeomorfismo, en donde A es el conjunto de los isomorfismos definido en (ii) y h_a el isomorfismo del punto (i).

(d) De un ejemplo de grupo $(G, *)$, o condición que deba cumplir el grupo $(G, *)$ para que la función φ resulte constante.