

MA1101-1 - Introducción al Álgebra

20.05.2013

Auxiliar extra - Recuperativo

Profesor: *Pablo Dartnell*Auxiliar: *Leonel Huerta*

P1. Sean A, B, C conjuntos. Pruebe que:

(a) $A \triangle B = A \triangle C \Rightarrow B = C$

(b) $A \cup B = A \cap C \Leftrightarrow B \subseteq A \wedge A \subseteq C$

P2. *Control 2, 2013*

Sean A, B dos conjuntos fijos cualquiera. Sea:

$$F : \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \rightarrow \mathcal{P}(A \cup B) \\ (X, Y) \rightarrow F((X, Y)) = X \cup Y$$

(a) Demuestre que F es sobreyectiva.

(b) Suponga que $A \cap B = \emptyset$. Demuestre que F es inyectiva.

(c) Suponga ahora que $A = \{1, 2\}$ y $B = \{2, 3\}$. Demuestre que F no es inyectiva.

P3. (a) Demuestre por inducción que: $\forall n \in \mathbb{N}, 2^{2n} - 3n - 1$ es divisible por 9.

(b) Pruebe que, para todo natural $n \geq 1$, se tiene que:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+k} \leq \frac{5}{6}$$

(c) Considere la suma:

$$S = 1 + \frac{1+8}{4} + \frac{1+8+27}{9} + \dots + \frac{1+8+27+\dots+n^3}{n^2}$$

Escriba S como una sumatoria doble y calcule su valor.

P4. **Propuesto**

Control 4, 2013

(a) Demuestre, sin usar inducción, que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=3}^{n+3} (-1)^{k-3} (k-2) \binom{n+3}{k} = n+1$$

(b) Sea A un conjunto y $f : A \rightarrow \mathbb{N}$ una función. Demuestre que, si $\forall n \in \mathbb{N}, f^{-1}(\{n\})$ es numerable, entonces A es numerable.

P5. Propuesto

Sean A, B conjuntos no vacíos y $f : A \longrightarrow B$ una función. Se define la relación de equivalencia $\mathcal{R}$ en A mediante:

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

Se define $g : A \setminus \mathcal{R} \longrightarrow B$ como $g([x]_{\mathcal{R}}) = f(x)$. Además definimos la función $h : A \longrightarrow A \setminus \mathcal{R}$ por $h(x) = [x]_{\mathcal{R}}$. Demuestre que:

- (a) g es una función bien definida e inyectiva.
- (b) h es sobreyectiva.
- (c) $f = g \circ h$