

Control Recuperativo

- P1.** (a) Use inducción para probar que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^3 + 5n$ es divisible por 6.
(b) Demuestre, usando inducción, que

$$\sum_{i=1}^n (1+i)2^i = n \cdot 2^{n+1}, \quad \forall n \geq 1.$$

- P2.** (a) Considere para $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, la función $f_{a,b} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f_{a,b}(x) = ax + b$.
Se define además el conjunto

$$G = \{f_{a,b} : a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}.$$

- (a.1) Pruebe que $\text{id}_{\mathbb{R}}$ pertenece a G .
(a.2) Pruebe que toda función $f_{a,b} \in G$ es biyectiva, y muestre que $f_{a,b}^{-1} \in G$.
(a.3) Para $f_{a,b}, f_{c,d} \in G$, calcule $f_{a,b} \circ f_{c,d}(x)$ y muestre que $f_{a,b} \circ f_{c,d} \in G$.
(b) Considere ahora el conjunto $S = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es función}\}$, y la relación \mathcal{R} definida sobre S por:

$$\forall f, g \in S, \quad f\mathcal{R}g \iff g^{-1} \circ f \in G.$$

- (b.1) Demuestre que \mathcal{R} es una relación de equivalencia.
(b.2) Muestre que $[\text{id}_{\mathbb{R}}]_{\mathcal{R}} = G$.

Tiempo: 1.15 horas.