



## Pauta Control Recuperativo

### P1.

- a) (3.0 puntos) Use inducción para probar que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $n^3 + 5n$  es divisible por 6.
- i) Caso base para  $n = 0$ . Es inmediato que 0 es divisible por 6.  
Si se inicia en  $n = 1$ , también  $1^3 + 5 \cdot 1 = 6$  es divisible por 6.
- ii) H.I. Sea  $n^3 + 5n$  divisible por 6, es decir,  $\exists k \in \mathbb{N}$  tal que  $n^3 + 5n = 6k$ , algún  $n \in \mathbb{N}$ . (1.0 pto.)
- iii) Por demostrar que  $(n+1)^3 + 5(n+1)$  es divisible por 6.  
En efecto  $(n+1)^3 + 5(n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 5n + 5$   
 $= n^3 + 5n + 3n(n+1) + 6 = 6k + 3n(n+1) + 6$  según H.I. (1.0 pto.)  
Además el término  $n(n+1)$  contiene dos naturales consecutivos y por lo tanto uno de ellos es par.  
Sigue que  $3n(n+1) = 3 \cdot 2p = 6p$  con  $p \in \mathbb{N}$ .  
Así  $(n+1)^3 + 5(n+1) = 6k + 6p + 6 = 6(k+p+1)$  es divisible por 6. (1.0 pto.)
- b) Demostrar, usando inducción que  $\sum_{i=1}^n (1+i)2^i = n \cdot 2^{n+1}$ ,  $\forall n \geq 1$
- i) Caso base,  $n = 1$ ,  $\sum_{i=1}^1 (1+i)2^i = 1 \cdot 2^2 \Leftrightarrow (1+1)2^1 = 4 \Leftrightarrow V$  (0.5 ptos.)  
H.I.
- ii) Sea  $\sum_{i=1}^n (1+i)2^i = n \cdot 2^{n+1}$ , algún  $n \in \mathbb{N}$ .
- iii) Por dem.  $q' : \sum_{i=1}^{n+1} (1+i)2^i = (n+1)2^{n+2}$  (0.5 ptos.)  
En efecto  $\sum_{i=1}^{n+1} (1+i)2^i = \sum_{i=1}^n (1+i)2^i + (n+2)2^{n+1} = n \cdot 2^{n+1} + (n+2)2^{n+1}$  (1.0 pto.)  
 $= 2^{n+1}(n+2+n) = 2^{n+1} \cdot 2(n+1) = (n+1) \cdot 2^{n+2}$  (1.0 pto.)

### P2.

- a)  $f_{a,b} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ ,  $f_{a,b}(x) = ax + b$   
 $G = \{f_{a,b}/a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$
- a.1) La identidad  $\text{id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es elemento de  $G$ .  
En efecto,  $\text{id}_{\mathbb{R}}(x) = x = 1 \cdot x + 0$  donde  $a = 1$ ,  $b = 0$  y por lo tanto  
 $\text{id}_{\mathbb{R}} \in G$  (0.5 ptos.)
- a.2) Sea  $f_{a,b}(x) = ax + b$ .  
 $y = f_{a,b}(x) = ax + b$  es sobreyectiva. Basta tomar,  $\forall y \in \mathbb{R}$ ,  
 $x = \frac{y-b}{a} \in \mathbb{R}$  ( $a \neq 0$ ) para que  $f_{a,b}(x) = \frac{y-b}{a} \cdot a + b = y$ . (0.5 ptos.)  
 $f_{a,b}$  es inyectiva: Sean  $f_{a,b}(x_1) = f_{a,b}(x_2) \Leftrightarrow ax_1 + b = ax_2 + b \Rightarrow x_1 = x_2$ . (0.5 ptos.)  
Así,  $f_{a,b}$  es biyectiva y  $f_{a,b}^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$  donde  $\frac{1}{a} \neq 0 \wedge \frac{-b}{a} \in \mathbb{R}$   
es decir,  $f_{a,b}^{-1} \in G$  (0.5 ptos.)

- a.3) Sean  $f_{a,b}, f_{c,d} \in G$  con  $f_{a,b}(x) = ax + b \wedge f_{c,d}(x) = cx + d$ , con  $a, c \neq 0$   
 Así  $(f_{a,b} \circ f_{c,d})(x) = f_{a,b}(f_{c,d}(x)) = a(cx + d) + b = acx + ad + b$  (0.5 ptos.)  
 donde  $ac \neq 0$  y  $(ad + b) \in \mathbb{R}$ , por lo tanto  $f_{a,b} \circ f_{c,d} \in G$  (0.5 ptos.)
- b)  $S = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$  y  $\mathcal{R}$  definida sobre  $S$  por:  
 $\forall f, g \in S, f\mathcal{R}g \Leftrightarrow g^{-1} \circ f \in G$ .
- b1) Demostrar que  $\mathcal{R}$  es relación de equivalencia.  
 En efecto,  $\mathcal{R}$  es refleja:  $\forall f \in S, f\mathcal{R}f \Leftrightarrow f^{-1} \circ f \in G$ , pero  
 $f^{-1} \circ f = \text{id}_{\mathbb{R}}$  y  $\text{id}_{\mathbb{R}} \in G$ , según (a.1). (0.5 ptos.)  
 $\mathcal{R}$  es simétrica.  
 Sean  $f, g \in S$  tales que  $f\mathcal{R}g \Leftrightarrow g^{-1} \circ f \in G$ ,  
 pero  $g^{-1} \circ f$  es biyectiva (composición de biyecciones) y según (a.2)  
 $(g^{-1} \circ f)^{-1} \in G \Leftrightarrow (f^{-1} \circ g) \in G \Leftrightarrow g\mathcal{R}f$  (0.5 ptos.)  
 $\mathcal{R}$  es transitiva.  
 Sean  $f, g, h \in S$  tales que  $f\mathcal{R}g \wedge g\mathcal{R}h \Leftrightarrow (g^{-1} \circ f) \in G \wedge (h^{-1} \circ g) \in G$   
 pero según (a.3),  $[(h^{-1} \circ g) \circ (g^{-1} \circ f)] \in G \Leftrightarrow (h^{-1} \circ (g \circ g^{-1}) \circ f) \in G$   
 $\Leftrightarrow (h^{-1} \circ f) \in G \Leftrightarrow f\mathcal{R}h$ .  
 Se concluye que  $\mathcal{R}$  es relación de equivalencia. (1.0 pto.)
- b2) Probar que  $[\text{id}_{\mathbb{R}}]_{\mathcal{R}} = G$   
 En efecto,  $[\text{id}_{\mathbb{R}}]_{\mathcal{R}} = \{f \in S / f\mathcal{R}\text{id}_{\mathbb{R}}\} = \{f \in S / (\text{id}_{\mathbb{R}}^{-1} \circ f) \in G\}$  (0.5 ptos.)  
 Pero  $\text{id}_{\mathbb{R}}^{-1} \circ f = \text{id}_{\mathbb{R}} \circ f = f$ .  
 Así,  $[\text{id}_{\mathbb{R}}]_{\mathcal{R}} = \{f \in S / f \in G\} = G$ . (0.5 ptos.)