

Control Recuperativo.

Introducción al Álgebra MA 1101 (2009-1)

Penta Probleme 1

i) Por demostrar que $[p \Rightarrow r] \Rightarrow [(p \wedge q) \Rightarrow r]$ es Tautología.

$$[p \Rightarrow r] \Rightarrow [(p \wedge q) \Rightarrow r] \Leftrightarrow (\bar{p} \vee r) \Rightarrow (\overline{p \wedge q} \vee r)$$

Def. $\Rightarrow \Leftrightarrow \bar{p} \vee r \vee [\overline{p \wedge q} \vee r] \Leftrightarrow (p \wedge \bar{r}) \vee \bar{p} \vee \bar{q} \vee r$ (Morgan)

Distrib $\Leftrightarrow [(p \wedge \bar{r}) \vee \bar{p}] \vee \bar{q} \vee r \Leftrightarrow [(p \vee \bar{p}) \wedge (\bar{r} \vee \bar{p})] \vee \bar{q} \vee r \xrightarrow{(1.0)}$

Asociat. y Conmut. $\Leftrightarrow \bar{r} \vee \bar{p} \vee \bar{q} \vee r \Leftrightarrow (\bar{r} \vee r) \vee (\bar{p} \vee \bar{q}) \Leftrightarrow V \vee (\bar{p} \vee \bar{q}) \Leftrightarrow V \xrightarrow{(2.0)}$

OBSERVACION: También puede resolverse argumentando por inspección suponiendo que si $(p \wedge q) \Rightarrow r$ es F, necesariamente $(p \Rightarrow r)$ debe ser F.

ii) $A \cap W \subseteq B \cap W \wedge A \cap W^c \subseteq B \cap W^c \Rightarrow A \subseteq B$

Por propiedad conocida se sabe que la unión y la intersección término a término de las relaciones de los hipótesis se conservan. Sigue que para \subseteq

$$(A \cap W) \cup (A \cap W^c) \subseteq (B \cap W) \cup (B \cap W^c) \xrightarrow{(1.0)}$$

$$\Leftrightarrow A \cap (W \cup W^c) \subseteq B \cap (W \cup W^c) \quad \text{Distributividad}$$

$$\Leftrightarrow A \cap U \subseteq B \cap U.$$

$$\Leftrightarrow A \subseteq B \xrightarrow{(2.0)}$$

OBS: También puede argumentarse por elementos.

Punto Problema 2

i) Para la clase de equivalencia de $(0,1)$ se tiene.

$$\begin{aligned} [0,1]_R &= \{ (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} / (a,b) R (0,1) \} \\ &= \{ (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} / a+1=b \} \text{ es equivalente} \\ &= \{ (n, n+1) / n \in \mathbb{N} \} \end{aligned}$$

—————→ (2.0)

ii) $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} / R \rightarrow \mathbb{Z}$ tal que $f([a,b]_R) = a-b$

es biyectiva.

En efecto, sea $f([a,b]_R) = f([c,d]_R)$ para $[a,b]_R, [c,d]_R \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} / R$

$$\Rightarrow a-b = c-d \Leftrightarrow a+d = c+b$$

$$\Rightarrow (a,b) R (c,d) \Rightarrow [a,b]_R = [c,d]_R$$

Así, f es inyectiva.

—————→ (1.5)

También, $\forall p \in \mathbb{Z}$, basta tomar $[(a+p, a)]_R$ con $a \geq p$ de modo que $(\forall p \in \mathbb{Z}) \exists [(a+p, a)]_R \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} / R$ tal que

$$f([(a+p, a)]_R) = a+p-a = p$$

Siempre que f es sobreyectiva.

Por lo tanto f es biyectiva.

—————→ (1.5)

Como $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} / R \rightarrow \mathbb{Z}$ es biyección, se concluye que $|\mathbb{N} \times \mathbb{N} / R| = |\mathbb{Z}|$ pero $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$ y por lo tanto

$\mathbb{N} \times \mathbb{N} / R$ es numerable.

—————→ (1.0)

Pauta Problema 3

$$F = \{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / (\exists a \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}), f(x) = ax^2 \}$$

$$\varphi: F \rightarrow \mathbb{R} \text{ definido por } \forall f \in F, \varphi(f) = f(2)$$

i) φ es inyectivo.

En efecto, Sean $f, g \in F$ tales que $\varphi(f) = \varphi(g) \Rightarrow f(2) = g(2)$

$$\Rightarrow (\exists a_1, a_2 \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) a_1 x^2 = a_2 x^2 \Rightarrow a_1 = a_2$$

$$\Rightarrow a_1 x^2 = a_2 x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f = g.$$

φ es suryectiva.

Sigue que φ es inyectivo \rightarrow (1.5)

Por demostrar que $(\forall n \in \mathbb{R})(\exists f \in F); \varphi(f) = n$

En efecto, como $\varphi(f) = f(2)$ con $f(x) = ax^2, a \in \mathbb{R}$

bastará tomar $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(2) = 4a = n \Rightarrow a = \frac{n}{4}$

Así $f(x) = \frac{n}{4}x^2$ con lo cual $\varphi(f) = f(2) = \frac{n}{4} \cdot 4 = n \in \mathbb{R}$.

Con consecuencia φ es biyectiva. \rightarrow (1.5)

Y F no es numerable pues $|F| = |\mathbb{R}| \neq |\mathbb{N}|$ \rightarrow (1.0)

ii) Sean $f, g \in F$ tales que $f(x) = a_1 x^2, g(x) = a_2 x^2$

con $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(a_2 x^2) = a_1 a_2^2 x^4$$

$$\text{Así } \varphi(f \circ g) = (f \circ g)(2) = 16 a_1 a_2^2 = \frac{1}{4} 4 a_1 \cdot 16 a_2^2 \rightarrow (1.0)$$

$$= \frac{1}{4} (a_1 2^2) (a_2 2^2)^2 = \frac{1}{4} (f(2)) (g(2))^2$$

$$= \frac{1}{4} \varphi(f) (\varphi(g))^2 \rightarrow (1.0)$$

Pauta Problema 4

i) $S = 1 + \frac{1+2}{2} + \frac{1+2+3}{3} + \dots + \frac{1+2+\dots+m}{m} \quad m \in \mathbb{N} - \{0\}$

$$\Rightarrow S = \frac{\sum_{k=1}^1 k}{1} + \frac{\sum_{k=1}^2 k}{2} + \frac{\sum_{k=1}^3 k}{3} + \dots + \frac{\sum_{k=1}^m k}{m}$$

$$\Rightarrow S = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\sum_{k=1}^i k}{i} \right) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^i \left(\frac{k}{i} \right) \longrightarrow (1.0)$$

Segue que $S = \sum_{i=1}^m \left(\frac{1}{i} \sum_{k=1}^i k \right) = \sum_{i=1}^m \frac{1}{i} \cdot \frac{i(i+1)}{2}$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (i+1) = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^m i + \sum_{i=1}^m 1 \right]$$

Así $S = \frac{1}{2} \left[\frac{n(n+1)}{2} + n \right] = \frac{n}{4} [n+1+2] = \frac{n(n+3)}{4} \longrightarrow (2.0)$

ii) Por demostrar que $2^{2m} - 3m - 1$ es divisible por 9

i) Para $m=0$, $1 - 0 - 1 = 0$ es div. por 9

o bien para $m=1$ $2^2 - 3 - 1 = 0$ div por 9.

(1.0) \rightarrow 2) Sea $2^{2m} - 3m - 1$ div por 9, es decir $\exists k \in \mathbb{N}; 2^{2m} - 3m - 1 = 9k$

3) Por demostrar que $2^{2(m+1)} - 3(m+1) - 1$ es divisible por 9

En efecto, $2^{2m+2} - 3(m+1) - 1 = 4 \cdot 2^{2m} - 3m - 4$

(2.0) \rightarrow $= 4(2^{2m} - 3m - 1) + 9m = 4 \cdot 9k + 9m$

hipótesis

$= 9(4k+m)$ que es divisible por 9

OBSERVACION: También puede resolverse con doble inducción si $2^{2m+2} - 3m - 4 = 2^{2m} - 3m - 1 + 3(2^{2m} - 1) \rightarrow$ inducción indiv por 3