MA1101-1 - Introducción al Álgebra **09.05.2013**

Auxiliar 8

Profesor: *Pablo Dartnell* Auxiliar: *Leonel Huerta*

Propiedades importantes!

1. Si $A \subseteq B$, entonces $|A| \leq |B|$.

2. Si $|A| \leq |B| \wedge |B| \leq |C|$, entonces $|A| \leq |C|$.

3. Si A es infinito, entonces $|\mathbb{N}| \leq |A|$.

4. Si A es infinito y existe una inyección en $\mathbb{N}$, entonces$|A| \leq |\mathbb{N}|$, entonces $|\mathbb{N}| = |A|$.

5. Sean $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ conjuntos finitos, entonces $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ es un conjunto numerable.

Es decir, la unión numerable de conjuntos finitos es un conjunto numerable.

6. Sean $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ conjuntos numerables, entonces: $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ y $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ son conjuntos numerables.

Es decir, la unión finita o numerable de conjuntos numerables, es un conjunto numerable.

7. Sean $A_1, A_2, ..., A_n$ conjuntos numerables. Entonces $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ es un conjunto numerable.
Es decir, el producto cartesiano de una cantidad finita de conjuntos numerables, es numerable.

Problemas

P1. (a) Pruebe que el conjunto de los todos los triángulos con vértices en coordenadas de números naturales, es un conjunto numerable.

(b) Sean $m_0, n_0 \in \mathbb{Z}$. Pruebe que el conjunto de todas las rectas que pasan por (m_0, n_0) y tienen pendiente $q \in \mathbb{Q}$, es un conjunto numerable.

(c) Pruebe que el conjunto de todas las rectas que pasan por algun punto de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y tienen pendiente racional, es numerable.

P2. Sea A un conjunto cualquiera.

Sea $f : A \to \mathbb{N}$ una función tal que $(\forall n \in \mathbb{N}), f^{-1}(\{n\})$ es finito o numerable.

Demuestre que si A es infinito, entonces es numerable.

P3. Sea E el conjunto definido por:

$$E = \{(a_1, ..., a_n) \in \{-1, 1\}^n \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \sum_{i=1}^{n} a_i = 0\}.$$

Demuestre que:

(a) E es infinito.

(b) E tiene la misma cardinalidad de $\mathbb{N}$.

P4. *Control 4, 2009*

(i) Sean A, B, C conjuntos infinitos tales que:

$$A \cap B = \phi, \;\; A \cap C = \phi, \;\; |B| = |C|$$

Demuestre que $|A \cup B| = |A \cup C|$.

(ii) Considere el conjunto:

$$C = \{..., -16, -9, -4, -1, 1, 4, 9, 16, ...\},$$

es decir, C es el conjunto de todos los cuadrados de números naturales y sus opuestos.

Demuestre que C es infinito numberable.

P5. **Propuesto**

Sea S el conjunto definido por: $S = \{S_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid S_n$ es acotada por algún M natural;
$\forall n, m \in \mathbb{N}, n < m \Rightarrow (S_n < S_m \vee S_n = S_m = M)\}$.

Es decir, S es el conjunto de las sucesiones de números natulares que crecen hasta una cierta cota.

Demuestre que S es numerable.