MA1101-1 - Introducción al Álgebra **26.04.2013**

Auxiliar 6

Profesor: *Pablo Dartnell* Auxiliar: *Leonel Huerta*

P1. (a) Sin usar inducción, muestre que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

(b) Calcule el valor de la siguiente suma:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{i^2+2i+1} - \frac{i-1}{i^2}$$

P2. Considere la siguiente secuencia de números definida por recurrencia:

$$f_1 = 1$$
$$f_2 = 1$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$$

A esta secuencia de números se les llama **números de Fibonacci**.

La idea de este ejercicio es probar algunas identidades interesantes que cumplen los números de Fibonacci:

(a) Pruebe que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_{4n} \text{ es divisible por 3.}$$

(b) Muestre, usando inducción, que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=1}^{n} f_k = f_{n+2} - 1$$

(c) Demuestre que:

$$\forall n \in \mathbb{N}; n \geq 2, \quad f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n$$

A esta última identidad se le conoce por el nombre de *identidad de Cassini*.

P3. (a) Pruebe por inducción que, para todo natural $n \geq 2$, se tiene que:

$$2^{n-1}(a^n + b^n) > (a+b)^n$$

donde $(a+b) > 0$ y $a \neq b$.

(b) Pruebe que, para todo natural $n \geq 1$, se tiene que:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+k} \leq \frac{5}{6}$$

P4. *Control 3, 2011*

(a) Demuestre usando inducción que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k-1} k^2 = (n+1)(2n+1)$$

(b) Demuestre usando inducción que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 3^n + 4^n - 1 \text{ es divisible por 3.}$$

P5. **Propuesto:**

Pruebe que:

(i) $$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 5^{2n+1} + 7^{2n+1} \text{ es divisible por 6.}$$

(ii) $$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad (x-y) \text{ divide a } (x^n - y^n).$$

(iii)
$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + ... + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

(iv)
$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2\sqrt{n}.$$