MA1101-1 - Introducción al Álgebra **26.04.2013**

Auxiliar Extra - Relaciones

Profesor: *Pablo Dartnell* Auxiliar: *Leonel Huerta*

P1. **Definición:** Sea $\mathcal{R}$ una relación definida sobre el conjunto A. Decimos que $\mathcal{R}$ es *circular* si satisface:

$$\forall x, y, z \in A, (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \Rightarrow z\mathcal{R}x).$$

Pruebe que, si $\mathcal{R}$ es refleja y circular, entonces es de equivalencia.

P2. Sea $A = \mathbb{R}$ y considere la relación definida sobre A por :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 + y = y^2 + x$$

(a) Pruebe que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

(b) Determine la clase de equivalencia de un real cualquiera $x = a$.

P3. Sea E un conjunto no vacío. Sea P una relación refleja y transitiva definida sobre E. Se define una nueva relación $\mathcal{R}$ sobre E por:

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow aPb \wedge bPa$$

(a) Pruebe que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

(b) Sea $E/\mathcal{R} = \{[a]_\mathcal{R} \mid a \in E\}$, donde $[a]_\mathcal{R} = \{b \in E \mid a\mathcal{R}b\}$.

i. Pruebe que, si $a_1 \in [a]_\mathcal{R} \wedge b_1 \in [b]_\mathcal{R}$ entonces $aPb \Leftrightarrow a_1Pb_1$

ii. Se define la relación Q sobre $E/\mathcal{R}$ por:

$$[a]_\mathcal{R}Q[b]_\mathcal{R} \Leftrightarrow aPb.$$

Pruebe que Q es de orden sobre $E/\mathcal{R}$.

P4. Sea A un conjunto no vacío con n elementos. Sea $D(A)$ el conjunto que contiene todas las particiones de A. Definimos la relación $\mathcal{R}$ sobre $D(A)$ por:

$$\alpha\mathcal{R}\alpha' \Leftrightarrow (\forall B' \in \alpha')(\exists B \in \alpha) \ \ t.q. \ \ B' \subseteq B$$

(a) Pruebe que $\mathcal{R}$ es una relación de orden en $D(A)$.

(b) Pruebe que, si A tiene más de 3 elementos, $\mathcal{R}$ es un orden parcial.