MA1101-1 - Introducción al Álgebra **18.04.2013**

Auxiliar 5

Profesor: *Pablo Dartnell* Auxiliar: *Leonel Huerta*

Tipos de relaciones

Sea $\mathcal{R}$ una relación definida en un conjunto $A \neq \phi$, es decir, $\mathcal{R} \subseteq A \times A$.

Definición: $\mathcal{R}$ se dice **refleja** si y sólo si $(\forall x \in A)\ x\mathcal{R}x$.

Definición: $\mathcal{R}$ se dice **simétrica** si y sólo si $(\forall x, y \in A)\ x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$.

Definición: $\mathcal{R}$ se dice **antisimétrica** si y sólo si $(\forall x, y \in A)\ x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y$.

Definición: $\mathcal{R}$ se dice **transitiva** si y sólo si $(\forall x, y, z \in A)\ x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$.

Problemas

$\boxed{\text{P1.}}$ Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Consideremos la relación $\mathcal{R}$ sobre A definida por:

$$\mathcal{R} = \{(1,1), (1,2), (2,2), (1,3), (2,4), (1,4), (4,4)\}.$$

Determine si R es refleja, simétrica, antisimétrica o transitiva.

$\boxed{\text{P2.}}$ Sea E un conjunto y $A \neq \phi$ un subconjunto fijo de E. Se define en $P(E)$ la relación $\mathcal{R}$ por:

$$X\mathcal{R}Y \Leftrightarrow A \cap X = A \cap Y$$

(a) Demuestre que $\mathcal{R}$ es relación de equivalencia.

(b) Demuestre que el conjunto cuociente $P(E)/\mathcal{R} = \{[X] \mid X \in P(A)\}$.

(c) Demuestre que para $X, Y \in P(A)$ se tiene que $X \neq Y \Rightarrow [X] \neq [Y]$.

$\boxed{\text{P3.}}$ *Control 3, 2012*

(a) Se define en $\mathbb{Z}$ la relación $\mathcal{R}$ por:

$$m\mathcal{R}n \Leftrightarrow m^2 - n^2 \text{ es múltiplo de 3.}$$

(i) Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

(ii) Determine 4 elementos de $[0]_{\mathcal{R}}$ y de $[1]_{\mathcal{R}}$.

(b) Sea $\mathcal{F} = \{(A, f) | A \subseteq \mathbb{R} \wedge f : A \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ es función}\}$. Se define en $\mathcal{F}$ la relación Ω por:

$$(A, f)\Omega(B, g) \Leftrightarrow [A \subseteq B \wedge (\forall x \in A) f(x) = g(x)].$$

(i) Demuestre que Ω es una relación de orden.

(ii) ¿Es Ω un orden total en $\mathcal{F}$? Justifique.

P4. **Propuesto:**

Sea $\mathcal{R}_{3,2}$ una relación en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definida por:

$$(a, b)\mathcal{R}_{3,2}(c, d) \Leftrightarrow a \equiv_3 c \wedge b \equiv_2 d$$

(a) Pruebe que $\mathcal{R}_{3,2}$ es una relación de equivalencia.

(b) Elija sus dos pares favoritos de números enteros y encuentre sus clases de equivalencia. Si resultan iguales, elija otro par.

(c) ¿Cuántos elementos tiene el conjunto cuociente $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/\mathcal{R}_{3,2}$?