MA1101-1 - Introducción al Álgebra **12.04.2013**

Auxiliar 4

Profesor: *Pablo Dartnell* Auxiliar: *Leonel Huerta*

P1. (a) Sea $E \neq \phi$ y $f : E \longrightarrow E$ una función. Demuestre que:

$$f \text{ es biyectiva} \Leftrightarrow f \circ f \text{ es biyectiva.}$$

(b) Sea $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función tal que:

$$g(g(x)) = 7x + 3, \; \forall x \in \mathbb{R}.$$

Demuestre que g es biyectiva.

P2. Sea $f : A \longrightarrow B$ una función.

(a) Si $B_1, B_2 \subseteq B$, pruebe que:

$$f^{-1}(B_1) \backslash f^{-1}(B_2) = f^{-1}(B_1 \backslash B_2)$$

(b) Si $A_1, A_2 \subseteq A$, pruebe que:

$$f(A_1) \backslash f(A_2) \subseteq f(A_1 \backslash A_2)$$

Dé un ejemplo en que la inclusión no se tenga con igualdad.

P3. *Control 2, 2009*
Sea $\mathcal{F} = \{f : [0,1] \longrightarrow [0,1] \mid f \text{ es función}\}$. Sea $\mathcal{B} = \{f : [0,1] \longrightarrow [0,1] \mid f \text{ es función biyectiva}\}$.
Se definen la funciones:

$$\begin{aligned} \Psi : \mathcal{F} &\longrightarrow [0,1] \\ f &\longrightarrow \Psi(f) = \tfrac{f(o)+f(1)}{2} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} I : \mathcal{B} &\longrightarrow \mathcal{B} \\ f &\longrightarrow I(f) = f^{-1} \end{aligned}$$

(i) Demuestre que Ψ está bien definido, es decir, verifique que $(\forall f \in \mathcal{F})\Psi(f) \in [0,1]$.

(ii) Estudie inyectividad y sobreyectividad de Ψ.

(iii) Pruebe que $I(f \circ g) = I(g) \circ I(f)$.

(iv) Pruebe que I es biyectiva.

(v) Considere la función: $\Phi : \mathcal{B} \longrightarrow [0,1]$, definida por $\Phi(f) = \Psi(f)$, $\forall f \in \mathcal{B}$.

Demuestre que: $(\Phi \circ I)^{-1}(\{0\}) = \phi$ (Preimagen).

$\boxed{\text{P4.}}$ **Propuesto:**

(a) Sea $f : A \longrightarrow B$ una función. Demuestre que:
f es inyectiva $\Leftrightarrow \exists g : B \longrightarrow A$ tal que $g \circ f = id_A$

(b) Sea $f : A \longrightarrow B$ una función.
Se define $F : P(A) \longrightarrow P(B)$ por $F(X) = f(X) = \{f(x) : x \in X\}$, para todo $X \in P(A)$
Demuestre que : f es sobreyectiva $\Leftrightarrow$ F es sobreyectiva.