MA1101-1 - Introducción al Álgebra **04.04.2013**

Auxiliar 3

Profesor: *Pablo Dartnell* Auxiliar: *Leonel Huerta*

Recordatorio

Definición: Sea $f : A \longrightarrow B$ una función. Diremos que f es **inyectiva** si se cumple que:

$$(\forall x_1, x_2 \in A)[x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)]$$

O, equivalentemente, si se cumple que:

$$(\forall x_1, x_2 \in A)[f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2]$$

Definición: Sea $f : A \longrightarrow B$ una función. Diremos que f es **sobreyectiva** si se cumple que:

$$(\forall y \in B)(\exists x \in A) y = f(x)$$

Definición: Sea $f : A \longrightarrow B$ una función. Diremos que f es **biyectiva** si f es inyectiva y sobreyectiva a la vez.

Problemas

$\boxed{\text{P1.}}$ Considere las funciones $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; definidas por:

$$f(x) = 8 - x^3$$
$$g(x) = 4 - 2x$$

(a) Pruebe que ambas funciones son biyectivas.

Luego, considere la función $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \leq 2 \\ g(x) & si\ x > 2 \end{cases}$$

(b) Pruebe que la función h^{-1} existe y encuéntrela.

$\boxed{\text{P2.}}$ Se dice que una función f se dice *estrictamente creciente si* : $\forall x, y \in Dom(f)$ se tiene que:

$$x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$

(a) Pruebe que, toda función estrictamente creciente es inyectiva.

(b) Si $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ y f es estrictamente creciente, ¿es f biyectiva? Demuéstrelo o dé un contraejemplo según corresponda.

(c) Considere las funciones $f, g : A \longrightarrow B$ con $A, B \neq \phi$ y f inyectiva.
Se define $\gamma : A \longrightarrow B \times B$ como $\gamma(x) = (f(x), g(x)), \forall x \in A$.
Pruebe que γ es inyectiva.

$\boxed{\text{P3.}}$ *Control 2, 2011*

(a) Sean A, B conjuntos no vacíos. Considere la función $\Phi : A \times B \longrightarrow A$ definida por: $\Phi(a, b) = a$.

(i) Demuestre que Φ es sobreyectiva.

(ii) ¿Bajo qué condiciones sobre el conjunto B resulta Φ inyectiva? Justifique su respuesta.

(b) Sea A un conjunto no vacío. Se define la función $\Psi : A \longrightarrow A \times A$ por $\Psi(a) = (a, a)$.

(i) Demuestre que Ψ es inyectiva.

(ii) ¿Bajo qué condiciones sobre el conjunto A resulta Ψ sobreyectiva? Justifique su respuesta.

$\boxed{\text{P4.}}$ **Propuesto**

Control 2, 2012

Sean A, B, C, D conjuntos no vacíos tales que $A \cap C = \phi$ y $B \cap D = \phi$ y sean $f : A \longrightarrow B$ y $g : C \longrightarrow D$ dos funciones. Se define $h : A \cup C \longrightarrow B \cup D$ tal que, $\forall x \in A \cup C$,

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \in A \\ g(x) & si\ x \in C \end{cases}$$

(i) Demuestre que si f, g son inyectivas, entonces h es inyectiva.

(ii) Demuestre que si f, g son sobreyectivas, entonces h es sobreyectiva.

(iii) Si f, g son biyectivas, demuestre que h es biyectiva y encuentre su inversa. Justifique su respuesta.