

**MA1101 Introducción al Álgebra - Semestre Otoño 2013**

**Prof. Cátedra:** Mauricio Telias

**Prof. Auxiliar:** César Vigouroux

# Auxiliar # 13

Martes 11 de Junio

- P1.** a) Sea  $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$ . Muestre que todas las soluciones de  $|z| = |z - \alpha|$  pertenecen a una misma recta del plano cartesiano, dibújela.
- b) Muestre que el conjunto de los  $z \in \mathbb{C}$  tales que  $|z - \operatorname{Re}(z)| = (\operatorname{Im}(z))^2$  es la unión de tres rectas paralelas del plano cartesiano, dibújelas.
- c) Muestre que el conjunto de los  $z \in \mathbb{C}$  tales que:

$$\left| \frac{z - 2}{z + 1} \right| = 2$$

es una circunferencia en el plano complejo. Determine su centro y su radio.

- P2.** a) Expresar en la forma  $a + ib$  los complejos

$$\frac{(1 - i)^{17}}{1 + i^{17}} \quad 1 + i + \frac{i - 1}{|1 - i|^2 + i}$$

- b) Sean  $z_1, z_2$  complejos tales que  $|z_1| = |z_2| = 1$ . Pruebe que  $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$  si y solo si  $z_1 = z_2$ .
- c) Pruebe que si  $|z| < 1$  entonces

$$\operatorname{Re} \left( \frac{1 + z}{1 - z} \right) > 0$$

- d) Sean  $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  tales que:

$$\sum_{k=1}^n \frac{z_k}{|z_k|} = 0$$

Muestre que

$$\sum_{k=1}^n \frac{\bar{z}_k}{|z_k|} (z_k - z) = \sum_{k=1}^n |z_k|$$

y deduzca de esto que

$$\sum_{k=1}^n |z_k| \leq \sum_{k=1}^n |z_k - z|$$

**P3.** a) Pruebe que las raíces  $n$ -ésimas de un complejo cualquiera  $z$  son el producto de una raíz particular  $z_0 \in \mathbb{C}$  con una raíz  $n$ -ésima de la unidad.

b) Pruebe que la suma de las raíces  $n$ -ésimas de un complejo cualquiera es 0.

**P4.** a) Encuentre la parte real e imaginaria de :

$$(-1 + i\sqrt{3})^{3n} + (-1 - i\sqrt{3})^{3n}, \forall n \in \mathbb{N}$$

b) Sea  $w$  una raíz cúbica de la unidad distinta de 1. Pruebe que

$$(1 + w)^3 + (1 + w^2)^9 + (1 + w^3)^6 = 62$$

¡¡¡VAMOH CHILE, CTM!!!