MA1101 Introducción al Álgebra - Semestre Otoño 2013
Prof. Cátedra: Mauricio Telias
Prof. Auxiliar: César Vigouroux

Auxiliar # 4

Viernes 12 de Abril

P1. Considere el conjunto $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ es biyectiva}\}$ Es decir, los elementos de $\mathcal{F}$ son funciones biyectivas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Se define la función $\Psi : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ dada por:

$$\Psi(f, g) = (f \circ g)^{-1}$$

a) Justifique el hecho que $\forall (f, g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}.\ \Psi(f, g) \in \mathcal{F}$.

b) Pruebe que Ψ es sobreyectiva, pero no inyectiva.

c) Demuestre que para todo par $(f, g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}$ se tiene:

$$\Psi(\Psi(f, g), \Psi(g^{-1}, f^{-1})) = id_{\mathbb{R}}$$

d) (Propuesto) Sean $f_1, g_1, f_2, g_2 \in \mathcal{F}$ definidas por: $f_1(x) = 2x + 3$, $g_1(x) = x^3$, $f_2(x) = 5x^3 + 4$ y $g_2(x) = \frac{x}{2}$. Considere el conjunto $A = \{(f_1, g_1), (f_2, g_2)\}$ Determine $\Psi(A)$

P2. Sean A y B conjuntos no vacíos. Para cada $C \in \mathcal{P}(A \times B)$ se define la función:

$$f_C : A \to \mathcal{P}(B)$$

tal que para $x \in A$,

$$f_C(x) = \{y \in B : (x, y) \in C\}$$

Sea ahora la función $H : \mathcal{P}(A \times B) \to \mathcal{K}$ tal que $H(W) = f_W$, para $W \in \mathcal{P}(A \times B)$, donde $\mathcal{K} = \{g : A \to \mathcal{P}(B) : g \text{ es función}\}$

a) Calcule $f_\emptyset$.

b) Demuestre que si $E \subseteq A$ y $F \subseteq B$, entonces para $x \in A$ se tiene $f_{E\times F}(x) = F$ si $x \in E$ Ãş $f_{E\times F}(x) = \emptyset$ si no.

c) Demuestre que H es inyectiva.

P3. Sea $\mathcal{F} = \{f : [0, 1] \to [0, 1] : f \text{ es función}\}$ y $\mathcal{B} = \{f : [0, 1] \to [0, 1] : f \text{ es función biyectiva}\}$.

Se definen las siguientes funciones:

$\psi : \mathcal{F} \to [0, 1]$ tal que $\forall f \in \mathcal{F},\ \ \psi(f) = \frac{f(0)+f(1)}{2}$ y $I : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ tal que $\forall f \in \mathcal{B}\ \ I(f) = f^{-1}$.

i) Demuestre que ψ está bien definido.

ii) Estudie inyectividad y epiyectividad de ψ.

iii) Pruebe que $I(f \circ g) = I(g) \circ I(f)$.

iv) Pruebe que I es biyectiva.

v) Demuestre que $(\psi \circ I)^{-1}(\{0\}) = \emptyset$.

P4. **a)** Sea $U \neq \emptyset$ un conjunto universo. Se define la función $f : \mathcal{P}(U) \times \mathcal{P}(U) \to \mathcal{P}(U)$ por $f(X, Y) = X \setminus Y$.
Pruebe que $f^{-1}(\{U, \emptyset\}) = \{(U, \emptyset)\} \cup \{(X, Y) \in \mathcal{P}(U) \times \mathcal{P}(U) : X \subseteq Y\}$

b) Considere las funciones $f(x) = 3 - 2x$ y $g(x) = \frac{x}{2} - 2$. Pruebe que ambas son funciones biyectivas, pero sin embargo la función definida por

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \leq 2 \\ g(x) & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

No es biyectiva.