MA1101 Introducción al Álgebra - Semestre Otoño 2013**Prof. Cátedra:** Mauricio Telias**Prof. Auxiliar:** César Vigouroux**Auxiliar # 3**

Martes 2 de Abril

P1. Sea $f : A \rightarrow B$ y $C \subseteq A$. Se define: $g : C \rightarrow B$ tal que $g(x) = f(x) \quad \forall x \in C$
Demuestre que: $\forall D \subseteq B, \quad g^{-1}(D) = C \cap f^{-1}(D)$

P2. Se dice que una función f es *estrictamente creciente* si: $\forall x, y \in \text{Dom}(f)$ con $x < y$ se tiene $f(x) < f(y)$. Pruebe entonces que:

- a) Toda función estrictamente creciente es inyectiva.
- b) Si $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ y f es estrictamente creciente, entonces f no necesariamente es biyectiva.

P3. Considere las funciones $f, g : A \rightarrow B$ con $A, B \neq \emptyset$ y f inyectiva. Se define $\varphi : A \rightarrow B \times B$ como $\varphi(x) = (f(x), g(x))$ para cada $x \in A$.
Pruebe que φ es inyectiva.

Indicación: Recuerde que $(a, b) \neq (c, d) \Leftrightarrow [(a \neq c) \vee (b \neq d)]$

P4. Sea la función $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 6x + 11$. Determine A y B de modo que f sea biyectiva, luego, calcule f^{-1}

Indicación: Una función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ es simétrica respecto a la recta de ecuación $x = \frac{-b}{2a}$

P5. Considere el conjunto $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es biyectiva}\}$ Es decir, los elementos de $\mathcal{F}$ son funciones biyectivas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Se define la función $\Psi : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ dada por:

$$\Psi(f, g) = (f \circ g)^{-1}$$

- a) Justifique el hecho que $\forall (f, g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}. \Psi(f, g) \in \mathcal{F}$.
- b) Pruebe que Ψ es sobreyectiva, pero no inyectiva.
- c) Demuestre que para todo par $(f, g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}$ se tiene:

$$\Psi(\Psi(f, g), \Psi(g^{-1}, f^{-1})) = id_{\mathbb{R}}$$

- d) (Propuesto) Sean $f_1, g_1, f_2, g_2 \in \mathcal{F}$ definidas por: $f_1(x) = 2x + 3, g_1(x) = x^3, f_2(x) = 5x^3 + 4$ y $g_2(x) = \frac{x}{2}$. Considere el conjunto $A = \{(f_1, g_1), (f_2, g_2)\}$ Determine $\Psi(A)$

- P6.** a) Sea $U \neq \emptyset$ un conjunto universo. Se define la función $f : \mathcal{P}(U) \times \mathcal{P}(U) \rightarrow \mathcal{P}(U)$ por $f(X, Y) = X \setminus Y$.
Pruebe que $f^{-1}(\{U, \emptyset\}) = \{(U, \emptyset)\} \cup \{(X, Y) \in \mathcal{P}(U) \times \mathcal{P}(U) : X \subseteq Y\}$
- b) Considere las funciones $f(x) = 3 - 2x$ y $g(x) = \frac{x}{2} - 2$. Pruebe que ambas son funciones biyectivas, pero sin embargo la función definida por

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \leq 2 \\ g(x) & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

No es biyectiva.