CONTROL 2 MA1002 Otoño-2013

P1. (a) Calcule los siguientes límites, identificando con una Suma de Riemann

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+4}+\frac{n}{n^2+9}\ \cdots\ \frac{n}{n^2+n^2}\right)$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{e}+\sqrt[n]{e^2}+\sqrt[n]{e^3}+\sqrt[n]{e^4}+\quad\ldots\sqrt[n]{e^n}}{n}$

(b) Sea f derivable en $[a,b]$ y $M>0$ tal que $|f'(x)|\leq M$, todo $x\in[a,b]$.
Dado $n\in\mathbb{N}$, sea P la partición $\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$, con $x_k=x_0+kh$, $h=\frac{b-a}{n}$.
Si $S=\sum_1^n f(x_k)h$, demuestre que $S(f,P)-S\leq M(b-a)h$ y deduzca que

$$\left|\int_a^b f(x)dx-S\right|\leq M(b-a)h.$$

($S(f,P)$ es la suma superior de f asociada a la partición P)

P2. (a) Determinar la función (única) que satisface la relación

$$(x^3+1)f(x)-3\int_0^x t^2 f(t)dt=\tfrac{1}{5}x^5+\tfrac{1}{2}x^2+1$$

(b) Sea f una función continua tal que $\int_0^x tf(t)dt=senx-x\cos x$.

Calcule $f(\pi/2)$ y $f'(\pi/2)$

(c) Dada la función $f(x)=\int_x^2\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}dx$, calcule $\int_0^2 xf(x)dx$

Indicación: Aplique el 2°TFC a $f(x)=g(2)-g(x)$, donde g es la función tal que

$$g'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}$$

P3. (a) Determine el área encerrada por las curvas definidas por: $f(x)=4x+3$, $g(x)=6-x-2x^2$, para $x\in[-4,2]$

(b) Calcule el volumen generado por la región D encerrada por las curvas $y^2=x+2$ y $y=|x|$, al rotar D en torno del eje OX.