Auxiliar 2: Econometría IN-709

Inferencia

Se tiene un parámetro estimado, y se quiere hacer inferencia sobre el parámetro poblacional.

Hipótesis Nula:

$$\mathrm{H}_0\colon \mu = \mu_0,$$

Hipótesis Alternativa:

$$\mathrm{H}_1\colon \mu \neq \mu_0.$$

$$\mathrm{H}_1\colon \mu > \mu_0,$$

$$\mathrm{H}_1\colon \mu < \mu_0,$$

Ejemplo:

De una cierta muestra se estimó que la media era 16.357, con desviación estándar de 0.866. Se sabe que la muestra distribuye normal, y se desea saber si la media poblacional es 16.

- Plantar la hipótesis:

$$H_0: \mu = 16$$
$$H_A: \mu \neq 16$$

- Calcular estadístico:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \qquad Z = \frac{16.357 - 16}{\frac{0.866}{\sqrt{50}}} = 2.91$$

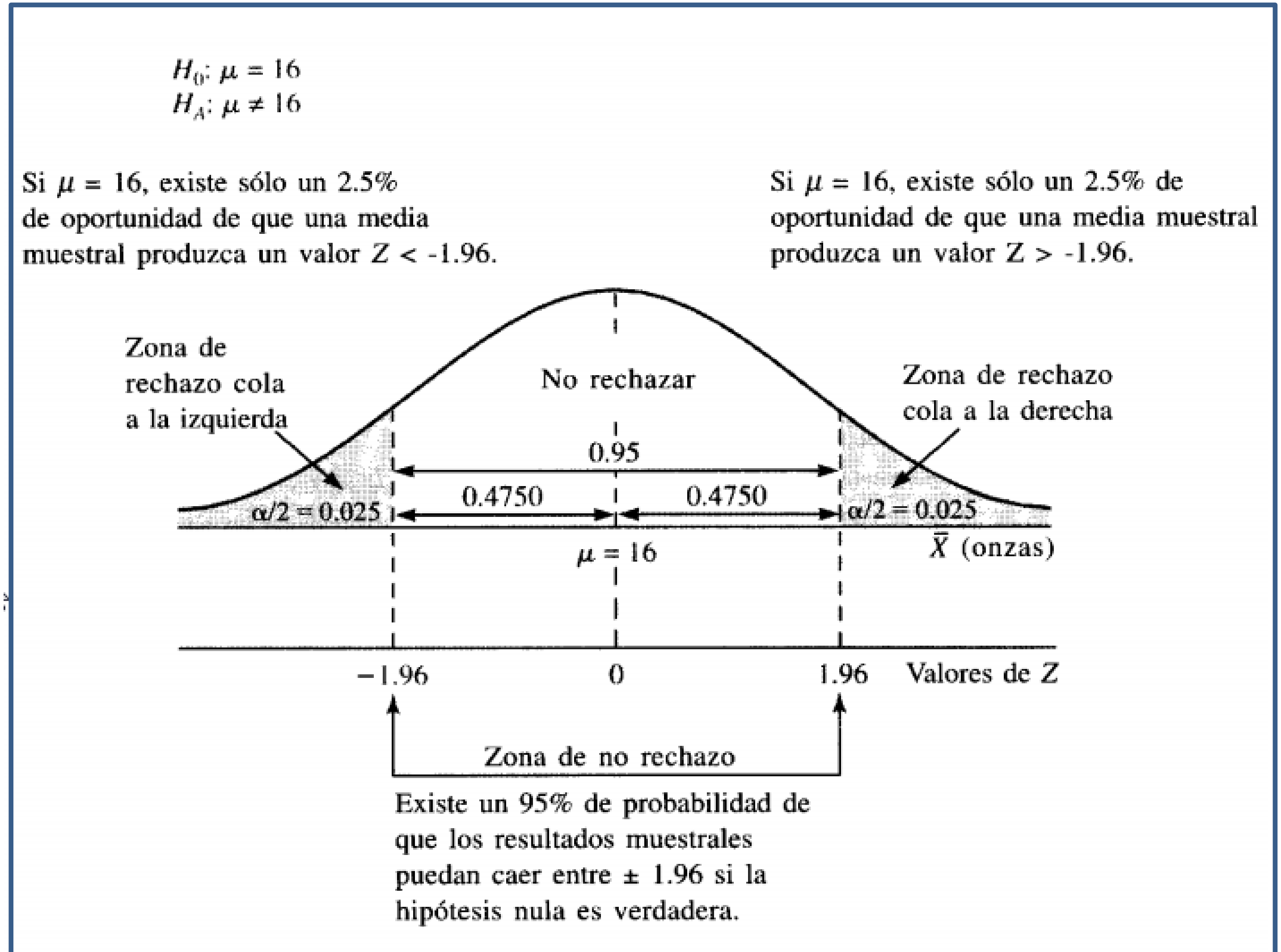
- Determinar nivel de significancia (NS): 5% o 0.05

- Calcular valores críticos al NS: -1.96, 1.96

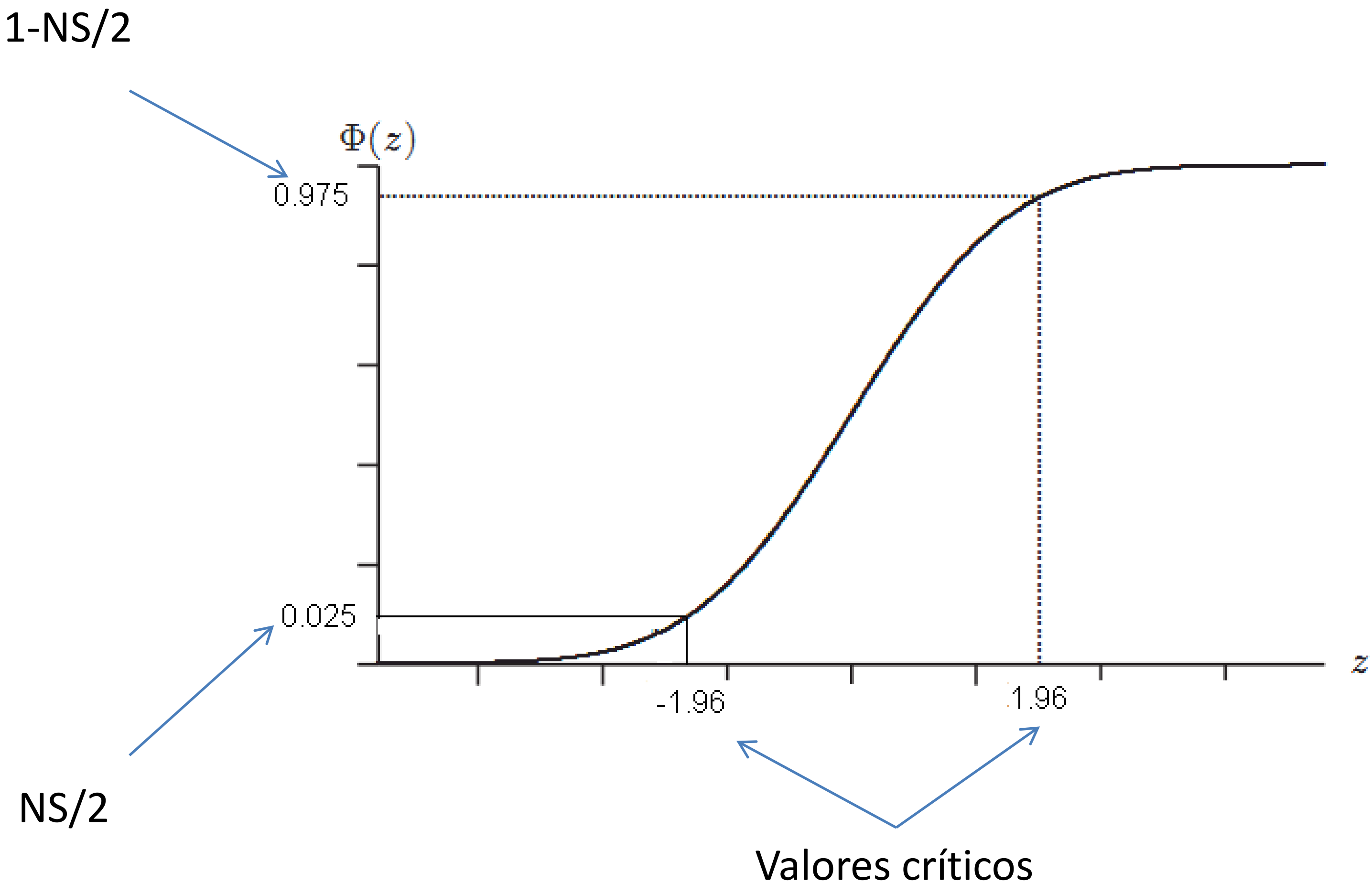
- Rechazar hipótesis nula si estadístico en valor absoluto es mayor que valores críticos en valor absoluto

Ejemplo:

De una cierta muestra se estimó que la media era 16.357, con desviación estandar de 0.866. Se sabe que la muestra distribuye normal, y se desea saber si la media poblacional es 16.



Cómo encontrar valores críticos (2 colas)



Para el caso de una cola, se utiliza (1-NS) o NS dependiendo de lo que se desee testear.

Rechazo con p-value:

P-value, menor nivel de significancia que puedo usar, y aún así rechazar la hipótesis nula.

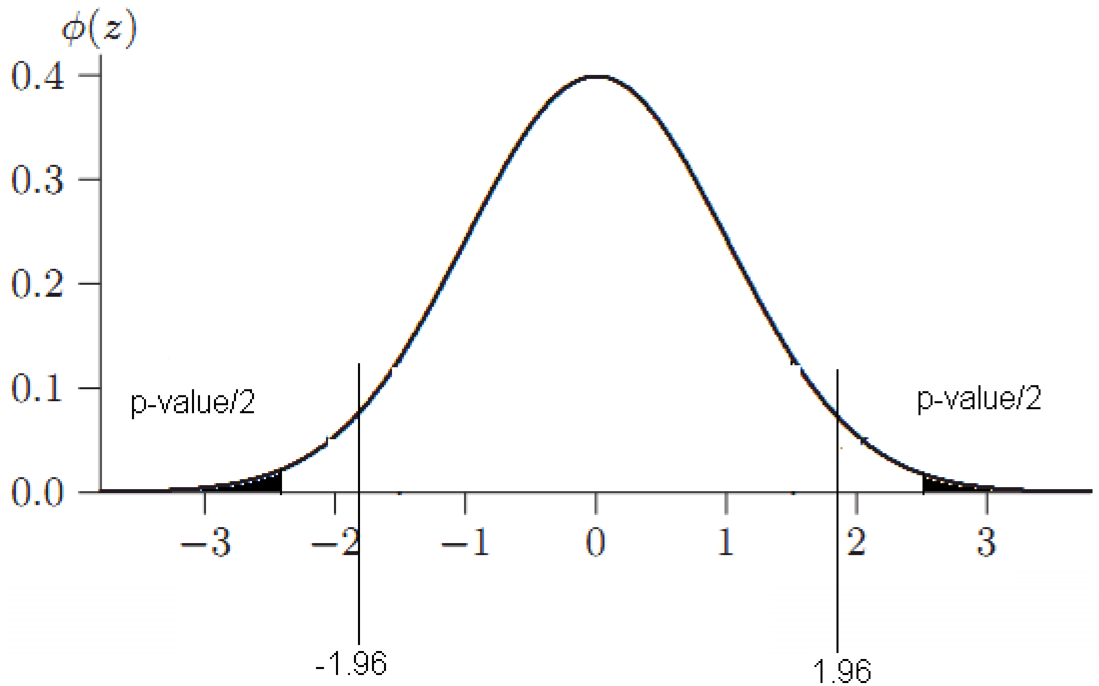
Si el p-value es menor o igual que el nivel de significancia, rechazo.
Si es mayor no rechazo.

Dos colas:

$$p(\hat{z}) = 2\big(1 - \Phi(|\hat{z}|)\big)$$

Una cola:

$$p(\hat{z}) = 1 - \Phi(|\hat{z}|)$$



Modelo Lineal:

$$Y = X\beta + u$$

donde X es una matriz de $(n \times k)$,u e Y son vectores $(n \times 1)$ y β es vector de $(k \times 1)$.

1. H_0: $\beta_i = 0 \Rightarrow$ Plantea que el regresor X_i no posee influencia alguna sobre Y. Este es el test más común y nos referiremos a él como *test de significancia*.

2. H_0: $\beta_i = \beta_{i0} \Rightarrow$ Plantea que el regresor X_i posee un impacto determinado por β_{i0} sobre Y.

3. H_0: $\beta_i + \beta_j=1 \Rightarrow$ Plantea que la suma de los regresores X_i y X_j poseen un impacto conjunto de magnitud 1.

4. H_0: $\beta_i = \beta_j \Rightarrow$ Plantea que los regresores X_i y X_j poseen el mismo impacto sobre Y.

5. H_0: $\beta_i=0$ $\forall$ i=2... k $\Rightarrow$ Plantea que todos los regresores conjuntamente, excepto la constante, son cero.

6. H_0: $\beta_l=0$ donde el vector β ha sido particionado en dos (β_l y β_p) con dimensiones $(k_l \times 1)$ y $(k_p \times 1)$ respectivamente, tal que $k_l + k_p = k$. Plantea entonces que un *subconjunto* de parámetros son estadísticamente no significativos.

Todas las hipótesis anteriores pueden ser resumidas en la siguiente expresión:

$$R\beta = r$$

donde R es una matriz de $(q \times k)$ constantes conocidas (ceros o unos), cuyo objetivo será *seleccionar* los parámetros a testear, cuyo número de filas, q, representa el número de restricciones. A su vez, r es un vector de dimensión q y contiene el real al cual es restringido cada parámetro. Veamos como serán las matrices R y r en cada una de nuestras hipótesis:

1. R=[0...010 ... 0]; r=0; q=1
   donde 1 se encuentra en la i-ésima posición

2. R=[0...010 ... 0]; r=β_{i0}; q=1
   donde 1 se encuentra en la i-ésima posición

3. R=[0...010 ... 010 ... 0]; r=1; q=1
   donde 1 se encuentra en la i-ésima posición y en la j-ésima posición.

4. R=[0...010 ... 0-10 ... 0]; r=0; q=1
   donde 1 se encuentra en la i-ésima posición y en la j-ésima posición.

5. R=[$\mathbf{0}_{q\times 1}$ I_{k-1}]; r=$\mathbf{0}$; q=$k-1$

6. R=[$\mathbf{0}_{k_i\times k_j}$ I_{k_i}]; r=$\mathbf{0}$; q=k_i

Ejercicios

1.1 Exercise 1: A special case for the relation between $\xrightarrow{d}$ and $\xrightarrow{p}$

(Amemiya 3.3) Suppose $X_N \xrightarrow{d} \alpha$, where α is a constant. Prove that $X_N \xrightarrow{p} \alpha$

1.2 Exercise 2: Consistency of the variance estimator

Show that if $\{x_n\}$ is an iid sequence of random variables with finite variance, then $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ is a consistent estimator of $Var(x_i)$.

1.3 Exercise 3: The Delta Method

Let the positive random vector $(X_n, Y_n)'$ be such that:
$\sqrt{n}\left(\begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mu_x \\ \mu_y \end{pmatrix}\right) \longrightarrow_d N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{pmatrix}\right)$. Find the joint asymptotic distribution of

$\begin{pmatrix} \ln X_n - \ln Y_n \\ \ln X_n + \ln Y_n \end{pmatrix}$. What is the condition under which $\ln X_n - \ln Y_n$ and $\ln X_n + \ln Y_n$ are asymptotically independent?

Ejercicio 1

1.1 Exercise 1: A special case for the relation between $\xrightarrow{d}$ and $\xrightarrow{p}$

(Amemiya 3.3) Suppose $X_N \xrightarrow{d} \alpha$, where α is a constant. Prove that $X_N \xrightarrow{p} \alpha$

Definiciones útiles

Definition (convergence in probability). The matrix-valued sequence of random variables Z_n is said to converge to a random matrix Z *in probability*, written as $Z_n \xrightarrow{p} Z$ or $p\lim Z_n = Z$, if

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n\to\infty} \Pr\{\|Z_n - Z\| > \varepsilon\} = 0,$$

i.e. the probability of large deviations converges to 0.

Result. $Z_n \xrightarrow{as} Z \Rightarrow Z_n \xrightarrow{p} Z$.

Definition (convergence in distribution). The vector-valued sequence of random variables Z_n is said to converge to a random vector Z *in distribution*, written as $Z_n \xrightarrow{d} Z$ or $Z_n \xrightarrow{d} \mathcal{D}_Z$, where $\mathcal{D}_Z$ is the distribution of Z, if

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\{Z_n \le z\} = \Pr\{Z \le z\}$$

for all continuity points z of $\Pr\{Z \le z\}$.

Ejercicio 2

1.2 Exercise 2: Consistency of the variance estimator

Show that if $\{x_n\}$ is an iid sequence of random variables with finite variance, then $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ is a consistent estimator of $Var(x_i)$.

Definiciones útiles

If $\hat{\theta}$ is an estimator of the scalar parameter θ, then $\hat{\theta}$ is consistent for θ if

$$\hat{\theta} \xrightarrow{p} \theta$$

If $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ is an estimator of the $n \times 1$ vector $\boldsymbol{\theta}$, then $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ is consistent for $\boldsymbol{\theta}$ if $\hat{\theta}_i \xrightarrow{p} \theta_i$ for $i = 1, \ldots, n$.

1.1. Ley de los Grandes Numeros (Kintchin)

Sea $X_1, X_2 .....X_N$ una sucesión de vectores aleatorios independientes y identicamente distribuidos tal que:

$$E(X_k) = \mu \qquad \forall k = 1, 2....N$$

entonces la sucesión de medias muestrales $\bar{X}_1, \bar{X}_2 .....\bar{X}_N$ converge en probabilidad a μ : $\bar{X}_N \xrightarrow{p} \mu$ o:

$$\text{plim}\bar{X}_N = \mu$$

Este resultado es muy importante dado que nos permite determinar un estimador consistente de la media desconocida de una muestra aleatoria sin hacer ningun supuesto sobre la distribución de los vector aleatorios considerados, utilizando unicamente los supuestos que los X_k sean i.i.d. y tengan identica media μ.

1.2. Teorema Central del Limite (Lindberg-Levy)

Sea $X_1, X_2 .....X_N$ una sucesión de vectores aleatorios independientes y identicamente distribuidos tal que:

$$\begin{aligned} E(X_k) &= \mu \qquad \forall k = 1, 2....N \\ Var(X_k) &= \Sigma \qquad \forall k = 1, 2....N \end{aligned}$$

entonces la sucesión de medias muestrales $\bar{X}_1, \bar{X}_2 .....\bar{X}_N$ converge en distribución a una distribución normal multivariante con media μ y matriz de varianza y covarianza limite Σ :

$$\bar{X}_N \xrightarrow{d} N(\mu, \Sigma)$$

Ejercicio 3

1.3 Exercise 3: The Delta Method

Let the positive random vector $(X_n, Y_n)'$ be such that:
$\sqrt{n}\left(\begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mu_x \\ \mu_y \end{pmatrix}\right) \longrightarrow_d N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{pmatrix}\right)$. Find the joint asymptotic distribution of

$\begin{pmatrix} \ln X_n - \ln Y_n \\ \ln X_n + \ln Y_n \end{pmatrix}$. What is the condition under which $\ln X_n - \ln Y_n$ and $\ln X_n + \ln Y_n$ are asymptotically independent?

Definiciones útiles

Theorem (Delta Method). Let the sequence of $k \times 1$ random vectors Z_n satisfy

$$\sqrt{n}\,(Z_n - Z) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \Sigma),$$

as $n \to \infty$, where $Z = p\lim Z_n$ is constant, and the $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$ function $g(z)$ be continuously differentiable at Z. Then

$$\sqrt{n}\,(g(Z_n) - g(Z)) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, G\Sigma G'),$$

where $G = \left.\dfrac{\partial g(z)}{\partial z'}\right|_{z=Z}$.

Theorem (Slutsky). If $U_n \xrightarrow{p} U = \text{const}$ and $V_n \xrightarrow{d} V$ as $n \to \infty$, then

- $U_n + V_n \xrightarrow{d} U + V$.
- $U_n V_n \xrightarrow{d} UV$, $V_n U_n \xrightarrow{d} VU$.
- $U_n^{-1} V_n \xrightarrow{d} U^{-1} V$, $V_n U_n^{-1} \xrightarrow{d} VU^{-1}$ if $\Pr\{\det(U_n) = 0\} = 0$.

<u>Continuity Theorem</u> (CT)

If $X_n \xrightarrow{p} x$, and $g(\cdot)$ is a continuous function at x
$\Longrightarrow g(X_n) \xrightarrow{p} g(x)$

<u>Continuous Mapping Theorem</u> (CMT)

If $X_n \xrightarrow{d} X$, and $g(\cdot)$ is a continuous function at the support of X$\Longrightarrow g(X_n) \xrightarrow{d} g(X)$

Matlab: Test de hipótesis

$$\left(R\hat{\beta}_{MCO} - r\right)' \left[\hat{\sigma}^2_{MCO} R \left(X'X\right)^{-1} R'\right]^{-1} \left(R\hat{\beta}_{MCO} - r\right) = qF_{q,N-k} \xrightarrow{d} \chi^2_{(q)}$$

Matlab: Ley de grandes números

Let $X_1, X_2, .., X_N$ be a sequence of *iid* random variables with $E(X_i) = \mu$ and $Var(X_i) = \sigma^2 < \infty$.

Then

$$\overline{X}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} X_i \xrightarrow{p} \mu$$

Matlab: TCL Univariado

Let $X_1, X_2, ..., X_N$ be a sequence of *iid* random variables with $E(X_i) = \mu$ and $Var(X_i) = \sigma^2 < \infty$

Then

$$\left(\frac{\overline{X}_N - E(\overline{X}_N)}{\sqrt{V(\overline{X}_N)}}\right) = \sqrt{N}\left(\frac{\overline{X}_N - \mu}{\sigma}\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$$

Matlab: TCL Multivariado

(MCLT) Let $X_1, X_2, ..., X_N$ be a sequence of *iid* random vectors with $E(X_i) = \mu$ and $Var(X_i) = \Sigma$ finite Then

$$\sqrt{N}(\bar{X}_N - \mu) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \Sigma)$$

The CLT is extremely useful. It states that for any collection of iid random variables with finite variance, the standardized sample average has a standard normal distribution, no matter the true distribution of X_i. For the vectorial case just notice that linear combinations of normal are distributed normal.