Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: INVESTIGACIÓN OPERATIVA

Nacimiento y Muerte

Denis Sauré V.

Julio, 2003.

1. Problemas de Nacimiento

1. Un centro de fotocopiado dispone de 2 máquinas fotocopiadoras, manejadas por operarios distintos. Al local llegan clientes (en su mayoría estudiantes) de acuerdo a un proceso Poisson de tasa λ [clientes/segundo].

   El número de copias que desea cada cliente se puede aproximar por una variable aleatoria continua exponencialmente distribuida, con media $1/\beta$ [copias]. Las máquinas fotocopiadoras difieren en su velocidad: la máquina 1 (la más rápida) demora exactamente $1/\alpha_1$ segundos por copia, mientras que la máquina 2 demora $1/\alpha_2$ segundos por copia ($\alpha_1 > \alpha_2$).

   Se atiende a los clientes en orden de llegada, formándose una cola cuando llegan clientes estando ambas máquinas ocupadas. El cliente a la cabeza de la cola será atendido en la primera máquina que se desocupe. Si cuando llega un cliente están las 2 máquinas desocupadas, se le atenderá de inmediato usando la máquina 1.

   La experiencia indica que en los 2×3 [m^2] del local cabe un número arbitrariamente grande de estudiantes esperando por fotocopias.

   a) ¿Cómo se distribuye el tiempo que toma la atención de un cliente cualquiera con la máquina 1?. ¿Y con la máquina 2?. Note que si X es una v.a. con distribución exponencial de media M entonces, para $s > 0$, sX sigue una distribución exponencial de media sM.

   b) Modele el estado de ocupación del local como una cadena de Markov en tiempo continuo. ¿Qué condición deben satisfacer λ, β, α_1 y α_2 para que exista estado estacionario?. Asuma que dicha condición se cumple, y que, en consecuencia, existe una ley de probabilidades estacionarias (no es necesario que las calcule).
   Hint: Considere estados definidos por el número de clientes presentes en el local, salvo en los casos en que ello sea ambiguo.

   Responda en términos de las probabilidades estacionarias y los parámetros del problema:

   c) ¿Cuál es la tasa media de utilización (porcentaje del tiempo que está trabajando) de cada una de las máquinas en el largo plazo?.

   d) En promedio, ¿Cuántos clientes por unidad de tiempo son atendidos en cada una de las máquinas (i.e. tasa de salida de clientes de cada una)?. ¿Qué fracción de los clientes que llegan al local son atendidos por la máquina 1?.

   e) En promedio, ¿Cuánto tiempo pasa esperando en cola un cliente cualquiera?.

2. Imagine que usted trabaja en una fabrica artesanal de calcetines. Su tarea es teñir los calcetines, luego empaquetarlos en parejas. Los calcetines a teñir llegan de a uno y el lapso de tiempo entre la llegada de calcetines consecutivos se distribuyen exponencialmente con tasa λ [calcetines/u.t]. El tiempo que usted demora en teñir un calcetín se distribuye exponencialmente con media $1/\mu$ [u.t]. Usted puede teñir como máximo dos calcetines simultáneamente (uno en cada mano). Si un calcetín que llega, lo encuentra con las dos manos ocupadas, éste se pierde. Una vez que tiene dos calcetines teñidos, los empaqueta y son puestos a la venta. El tiempo que demora en empaquetar puede asumirse como despreciable.

   a) Modele la situación antes descrita como una cadena de Markov en tiempo continuo.

   b) Argumente si existen o no probabilidades estacionarias. En caso afirmativo, calcúlelas.

   c) ¿A que tasa debe teñir si se desea que, en el largo plazo 95 de cada 100 calcetines que llegan lo encuentran con al menos una mano vacía?. Si obtiene una ecuación complicada, la puede dejar expresada.

d) Suponiendo que todos los pares de calcetines teñidos se venden instantáneamente, calcule el precio mínimo que debe cobrar para que el negocio sea rentable en el largo plazo. Para ello asuma que el costo por calcetín que llega es C[u.m.] y el costo por teñir es de H [u.m./u.t].

3. En cierto pueblo viven actualmente kN habitantes. Este pueblo cuenta con un solo hospital con capacidad para N pacientes. Cada habitante mantiene una vida sana un tiempo aleatorio exponencialmente distribuido con tasa λ_A. Cuando una persona enferma, no concurre inmediatamente al hospital sino que permanece en observación en su casa un tiempo aleatorio exponencialmente distribuido con tasa λ_B. Pasado este periodo de observación, el paciente puede ser dado de alta o bien mantener su estado enfermo en cuyo caso es llevado al hospital. Con probabilidad p un paciente en observación va al hospital. El periodo de hospitalización de un paciente es una v.a. exponencialmente distribuida con tasa λ_C, después de dicho periodo el paciente es dado de alta. Si el hospital está lleno los pacientes que requieren hospitalización son desviados a una zona medianamente acondicionada en espera que un lugar se desocupe, suponga que la recuperación de estos pacientes sigue siendo exponencial con tasa λ_C.

   En base a la información anterior determine el número esperado de pacientes que están siendo atendidos en la zona de espera en un momento dado.
   Hint: Represente el estado de salud de un habitante como una cadena de Markov en tiempo continuo con tres estados.

4. Antes de que un producto pueda salir a la venta debe pasar por la sección de pintado la que cuenta con un único operario y recibe piezas de 2 tipos: las piezas tipo α que llegan según un proceso de Poisson de tasa λ_1 [piezas/minuto] y las piezas tipo β que llegan según un proceso de Poisson de tasa λ_2 [piezas/minuto] y el proceso de pintura demora un tiempo exponencialmente distribuido de media $1/\mu$[horas] en pintar cada pieza sin importar su tipo. La sección de pintura ha operado históricamente pintando las piezas en orden de llegada sin importar de que tipo sea. Sin embargo, los agotamientos de stock de las piezas tipo α hacen que sea más urgente terminar las piezas tipo α por lo que se está barajando instaurar una política de prioridades en el pintado.

   Suponga que se implanta la siguiente política de atención: Sólo se pintarán piezas β si no hay piezas tipo α esperando y si llega una pieza tipo α cuando hay una pieza tipo β siendo pintada, esta última debe ceder inmediatamente su puesto para que se procese la tipo α que acaba de llegar.

   a) Discuta bajo qué condiciones (en realción a los parámetros del problema) la nueva política de atención genera reducciones considerables en el tiempo de espera de una pieza de tipo α

   b) Modele la situación con prioridades como una cadena de Markov en tiempo continuo y escriba las ecuaciones que permitan encontrar las probabilidades etacionarias del sistema.

   c) ¿Cuánto tiempo pasa en promedio una pieza tipo α en la sección de pintura desde que llega hasta que sale terminada?. ¿Y cuánto demoran las tipo β?.
   Hint: Le puede ser útil seguir el siguiente esquema de razonamiento:
   - Piense en qué cola enfrenta una pieza tipo α que llega para ser pintada.
   - Piense en qué cola enfrenta una pieza cualquiera que llega para ser pintada si se supone que son indistinguibles.
   - ¿Qué relación existe entre el número de piezas tipo α en el sistema y el número total de piezas en el sistema?.

   d) Suponga ahora que se implanta una política de atención con prioridad idéntica a la anterior, pero que la llegada de una pieza tipo α no interrumpe el proceso de pintado de una pieza tipo β que pudiera estarse atendiendo. Modele esquemáticamente la nueva situación como una cadena de Markov en tiempo continuo. ¿Puede usar el mismo razonamiento anterior para calcular los tiempos de espera?.

5. Considere un proceso de nacimiento puro en que cada individuo da a luz independientemente en un tiempo exponencial de tasa λ. Suponga que inicialmente existe un solo individuo y que con probabilidad $P(s)$, un individuo nacido en el instante s es "fuerte". Calcule la distribución del número de individuos "fuertes" nacidos en el intervalo $(0,\ t)$.

6. Una pequeña barbería es operada por un único barbero y tiene espacio para a lo más dos clientes. Los clientes potenciales llegan al negocio según un proceso de Poisson de tasa 3 clientes por hora. Los tiempos de atención son variables aleatorias iid exponenciales de media 1/4 hora.

   a) ¿Cuál es el número promedio de clientes dentro de la barbería en el largo plazo?.

   b) ¿Cuál es la proporción de clientes que entran al negocio?.

   c) Si el barbero trabajara el doble de rápido, ¿a cuánta gente más podría atender en promedio?.

7. (*) La banda criolla "Jorge y los Markovianos" finalmente han alcanzado el éxito a nivel nacional. Es así como se aprestan a realizar un concierto en el Estadio Nacional a modo de celebración. Jorge como buen alumno, ocupará sus conocimientos para estudiar la dinámica del número de personas que asiste al concierto. Jorge sabe que sus fanáticos son de dos tipos específicos. El primer grupo llegará al estadio de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa β . Una persona de este tipo es tal que si llega al estadio y encuentra éste con su capacidad nominal completa (suponga esta capacidad igual a N personas) se retirará indignado.

   Sin embargo, existe otro tipo de fanático a los que no les importa ir a ver tocar a Jorge sino que se motivan de acuerdo a la gran afluencia de público. Se puede suponer que los tiempos entre llegadas de este grupo están exponencialmente distribuidos y dependen linealmente del número de personas que ya se encuentran en el estadio. De esta manera, el tiempo esperado hasta que llegada el siguiente de estos fan, cuando hay sólo una persona en el estadio, es $1/\lambda$, mientras que si hay i es $1/(\lambda \cdot i)$. A este grupo no les interesa que el estadio ya haya sobrepasado su capacidad, dado que debido a la falta de seguridad ingresan al recinto de todas formas hasta que éste está por reventar, lo que ocurre cuando el número de personas es $3 \cdot N$.

   Finalmente se tiene, que independiente del tipo de fan que se trate, éste se aburre y regresa del estadio en un tiempo exponencialmente distribuido de media $1/\mu$. Suponga para efectos de este problema que el repertorio de Jorge no se acaba nunca.

   a) Modele el número de personas en el recinto como un proceso de nacimiento y muerte. ¿Cuál es la condición de estacionalidad?.

   b) Calcule una expresión que le permita calcular las probabilidades estacionarias.

   c) Si $N = 3$, $\lambda = \beta = 1$ y $\mu = 2$, determine la proporción del tiempo tal que no pueden ingresar al estadio fanáticos del primer tipo.

8. (*) Una tienda de mascotas tiene C jaulas en las que puede mantener perros a la venta de las más variadas razas. El tiempo que transcurre para que cada perro sea vendido está exponencialmente distribuido de media $1/\mu$ [días], independiente de la venta de los otros perros de la tienda.

   Para abastecerse de nuevas mascotas, la tienda cuenta con dos criaderos proveedoores: uno permanente y otro de reserva. El proveedor permanente envía nuevas mascotas a la tienda de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa λ [mascotas/días]. Si en algún momento del tiempo, la cantidad de perros en la tienda disminuye a R unidades o menos, entonces se contrará adicionalmente a un segundo criadero, complementario al anterior, para que mande nuevas mascotas. La llegada de estas mascotas constituye también un proceso de Poisson de tasa λ [mascotas/días]. Este contrato será valido mientras no se recupere el nivel de R mascotas en la tienda.

   a) Formule una cadena de Markov a tiempo continuo que modele la situación recién descrita.

b) Formule un sistema de ecuaciones que permita encontrar las probabilidades estacionarias. Calcule el valor de dichas probabilidades.

c) Cuanto espera en promedio un perro en la tienda antes de ser vendido?.

d) Suponga que P es el precio de los perros y por cada día que ellos están en la tienda se gasta K por conceptos de comida y servicio de veterinaria. Formule el problema de optimización que permite al dueño de la tienda encontrar el R que maximiza sus utilidades por unidad de tiempo.

9. Autos llegan a un taller de reparación de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa λ[autos / hora]. El taller mecánico es atendido por un único trabajador que utiliza la siguiente política de atención: Mientras hallan menos de R autos en el taller se dedica a labores administrativas, del momento en que hay R repara todos los autos hasta que no quedan trabajos pendientes (Note que los autos siguen llegando al taller mecánico). El tiempo de reparación de un auto es una variable aleatoria distribuida exponencialmente con media $1/\mu$[horas].

a) Modele el estado de ocupación del taller como una cadena de Markov en tiempo continuo.

b) Justifique la existencia de un régimen estacionario y entregue las ecuaciones que permiten calcular las probabilidades estacionarias.

c) Suponiendo conocidas las probabilidades estacionarias entregue expresiones para el número promedio de autos en el taller, fracción del tiempo que el mecánico dedica a labores administrativas.

Ahora considere que el mecánico siempre trabajará en el último auto que llega al taller, y que cuando retoma un trabajo abandonado parte de 0.

d) Modele esta nueva situación como una cadena de Markov en tiempo continuo.

e) ¿Bajo que situación un auto deberá esperar más tiempo para ser atendido?.

10. (*) Un centro de información telefónica cuenta con dos telefonistas cuyo tiempo de atención de llamadas es idénticamente distribuido y corresponde a una distribución exponencial de media igual a 1 minuto.

Dado que la operación de este call center está recién comenzando, no se cuenta con suficientes datos históricos como para determinar la distribución de probabilidad de la entrada de llamadas, aunque se puede suponer que los tiempos entre éstas son exponenciales. Además, en los pocos días de funcionamiento se ha advertido que el 10 % del tiempo ambas operadoras están desocupadas.

Si una persona llama y ambas operadoras están ocupadas su llamada quedará en espera hasta que alguna se desocupe y pueda atenderlo. Suponiendo que no existe una restricción sobre el número de llamadas que pueden quedar en espera, y que los clientes son infinitamente pacientes, responda:

a) ¿Qué condición hay que imponer sobre la tasa de entrada de llamadas para que exista estado estacionario?.

b) Determine la tasa de entrada de llamadas (λ).

c) Calcule el número promedio de llamadas en espera y el tiempo promedio de espera de un cliente antes de ser atendido.

Suponga ahora que las operadoras cuando ven que hay llamadas en espera apuran las atenciones. Los tiempos de atención siguen siendo variables aleatorias exponenciales, pero ahora la tasa con que una operadora atiende a un cliente cuando hay i clientes esperado es $i \cdot \mu$.

d) ¿Qué condición hay que imponer sobre la tasa de entrada de llamadas para que exista estado estacionario?.

e) Determine la ecuación que permitiría calcular la tasa de entrada de llamadas λ.

11. (*) La llegada de clientes a un banco sigue un proceso de Poisson de tasa λ. Una vez dentro del banco los clientes se encuentran frente a dos sistemas M/M/1, y deben elegir a qué cola ponerse. Lógicamente los clientes siempre escogerán la cola que tenga el menor largo y ante empates elegirán equiprobablemente.

    Una vez que elige la cola a la que se ponen no puede cambiar su elección. Asuma que los tiempos de atención son iguales en ambos sistemas, y exponencialmenete distribuidos de tasa μ.

    a) Modele el número de personas en cada cola como una cadena de Markov en tiempo continuo. Explicite claramente todas las transiciones posibles indicando las tasas respectivas. ¿cuál es la condición de estado estacionario?.

    b) Escriba las ecuaciones que le permitirían calcular las probabilidades estacionarias.

    c) ¿Cuál es la fracción del tiempo que la cola 1 está sin clientes ?.

12. (*) Una empresa generadora de energía eléctrica desea evaluar su capacidad de respuesta frente a posibles fallas en las centrales generadoras que posee dentro del país.

    Esta empresa posee N centrales generadoras a lo largo de Chile, las cuales permiten abastecer adecuadamente la demanda energética del país. Cada una de las centrales mencionadas puede trabajar sin sufrir fallas durante un tiempo exponencialmente distribuido de media $1/\lambda$ horas. Cuando ocurre una falla en una o más centrales entra en funciones un procedimiento de contingencia, el cual redistribuye la producción energética, permitiendo que el sistema opere satisfactoriamente.

    Para hacer frente a las fallas, cada central cuenta con un equipo de personal especializado en reparación, el cual demora un tiempo exponencialmente distribuido de media $1/\mu$ horas en restablecer la producción energética de la central afectada.

    a) Modele el número de centrales en reparación como una Cadena de Markov de tiempo continuo. Determine si existen probabilidades de estado estacionario justificando su respuesta. Plantee las ecuaciones necesarias para calcular las probabilidades estacionarias.

    b) En promedio ¿cuánto demora en ser reparada una central que falla y deja de operar?.

    c) Calcule el número de fallas por unidad de tiempo que afectan al sistema generador de energía.

    d) Usando la Fórmula de Little, calcule el número promedio de centrales en estado de falla.

    e) ¿Cuál es la probabilidad de encontrar detenida en el largo plazo a una central en particular?.

13. Ante la expectación provocada por el estreno de cierta película, la distribuidora cinematográfica a cargo de ella ha decidido implementar un servicio de venta telefónica de entradas. Para ello ha destinado 1 operario, que atiende sólo una línea de teléfonos, la cual no puede mantener llamadas en espera. La atención de una llamada cualquiera es una v.a. con distribución exponencial de media $1/\mu$ [horas].

    Los clientes se informan de la existencia del servicio de acuerdo a un proceso Poisson de tasa λ [clientes/hora].

    Cuando un cliente se informa de la existencia del servicio de venta telefónica llama inmediatamente para comprar entradas. Si encuentra la línea ocupada volverá a llamar después, y llamará tantas veces como sea necesario hasta que logre comprar sus entradas, pero dejando pasar, entre una llamada y la siguiente, un intervalo de tiempo aleatorio exponencialmente distribuido con media $1/\theta$ [horas].

    a) Suponga que en este momento hay n clientes que han llamado al menos una vez, pero no han podido comunicarse (han encontrado la línea ocupada). Además se sabe que el operario está desocupado ¿Cómo se distribuye el tiempo que transcurrirá hasta que reciba la próxima llamada?.

    b) Modele el número de personas que están intentando comprar entradas como una cadena de Markov en tiempo continuo. Cuide de incluir toda la información relevante en su formuación.

c) Asumiendo que existe estado estacionario, y suponiendo conocidos los valores de las probabilidades estacionarias, calcule, para el largo plazo:

- Para un cliente cualquiera, ¿Cuál es la probabilidad de conseguir entradas al primer llamado?. O bien, ¿Qué fracción de su tiempo está desocupado el operario? (Son equivalentes ¿Por qué?).
- ¿Qué fracción del tiempo en que el operario está desocupado hay clientes "esperando" (que han llamado y no han podido comunicarse)?.

d) Suponga que se cambia la planta telefónica por una que admite ∞ llamadas en espera y que todos los clientes esperarán en línea hasta ser atendidos, de forma que la venta telefónica de entradas puede modelarse como un sistema $M/M/1$, con disciplina de atención FIFO. Llamando $T_s =$ "tiempo en el sistema" al intervalo que transcurre desde que un interesado se informa acerca del servicio hasta que consigue comprar sus entradas, ¿El valor esperado de T_s aumentará o disminuirá producto del cambio?. ¿A qué se debe ese aumento o disminución?. ¿Qué espera que ocurra con la varianza de T_s?, explique intuitivamente.

e) Para la situación original (sin llamadas en espera) ¿Qué condición deben cumplir λ, θ y μ para que exista régimen estacionario?. Puede apoyar su argumento en su respuesta para la parte (*a*), para el caso de n muy grande y comparando con la condición de estado estacionario de un sistema $M/M/1$.

14. Una compañía de radio taxis mantiene un convenio de atención exclusiva con un taller de reparación de automóviles. La compañía de radio taxis posee $M+Y$ vehículos de los cuales debe mantenerse operando, según política de la empresa, un n^0 igual a M siempre que exista la posibilidad para ello. El resto de los autos se mantiene "stand-by" y entra en operación cuando alguno de los que se encuentra en actividad falla (i.e. mientras existan taxis "stand-by" siempre habrá M vehículos trabajando). El tiempo entre fallas para un taxi se distribuye exponencialmente con media $1/\lambda$ [días]. El taller de reparación cuenta con un sistema que permite prestar un servicio simultáneo a un máximo de C vehículos. El tiempo de reparación de un auto se distribuye exponencialmente con media $1/\mu$ [días]. Una vez que un vehículo es reparado entra al grupo de taxis "stand-by" hasta que se le necesite. Sólo pueden fallar autos que están operando.

a) Interesa estudiar el desempeño del taller de reparación. Deduzca las probabilidades estacionarias para todos los casos posibles.

b) Suponga que $M = 4$, $Y = 2$, $C = 2$. Calcule las medidas de efectividad.

15. (*) Considere un sistema de atención de clientes con 2 servidores. El proceso de llegada de clientes a una cola única es Poisson de tasa λ [clientes/hora] y la atención de los 2 servidores es exponencial de parámetro μ [clientes/hora] para cada servidor.

a) Calcule la tasa de salida de clientes del sistema.

b) Suponga que hay espacio para la espera de C clientes (además de los 2 que se están atendiendo). Cuando se llena el sistema, éste se cierra y no permite la entrada de más clientes. Describa la cadena de Markov asociada y el sistema de ecuaciones para determinar las probabilidades estacionarias, identificando los parámetros involucrados.

c) Para la situación original (sin restricción de capacidad), suponga que usted decide eliminar un servidor y aumentar la productividad del primero de modo que el tiempo de atención es exponencial con tasa 2μ [clientes/hora]. ¿Es este sistema equivalente al de dos servidores con tasa μ cada uno?. Explique o demuestre su respuesta con rigurosidad.

16. En el pueblo de Combarbalá, existen dos bancos que funcionan uno a cada lado de la calle principal. En ambos bancos existen dos cajeros cuyos tiempos de atención son exponenciales de media $1/\mu$ [horas]. Las llegadas a cada banco se describen según un proceso de Poisson de tasa λ[clientes / hora].

En el banco de la vereda sur, existen dos colas. Un cliente que llega a ese banco tiene la misma probabilidad de colocarse en cada cola. Una vez que un cliente se ha puesto en una cola, le es imposible cambiarse a la otra, aunque esta última se haya vaciado. En el banco de la vereda norte, existe una única cola para acceder a la atención de cualquiera de los dos servidores.

a) Calcule el tiempo medio de espera en el sistema y en la cola para cada banco. En promedio, cuántos clientes hay en cada banco.

b) Considerando los indicadores anteriores, qué modalidad de atención le parece más adecuada.

c) Discuta los supuestos y compare sus resultados con lo observado en la realidad.

17. Una estación de gasolina tiene sólo una bomba para cargar combustible, recibe un promedio de 21 vehículos por ahora según un proceso de Poisson. El bombero puede atender en promedio un vehículo cada 3 minutos con tiempos exponencialmente distribuidos. El área de espera de la gasolinera tiene capacidad para tres vehículos solamente. Si un cliente encuentra el área llena se retira indignado.

a) Calcule el número medio de clientes perdidos por hora.

b) ¿En cuánto debe aumentar el tamaño del área de espera para que el número medio de clientes disminuya a la mitad ?.

18. Considere un aeropuerto en el cual existe un paradero de taxis. Los taxis y pasajeros llegan al paradero de acuerdo a procesos de Poisson independientes con tasas 1 y 2 por minuto respectivamente. Los taxis que llegan al paradero siempre esperan pasajeros (independiente del número de taxis en la cola). Sin embargo, los pasajeros que llegan al paradero y no encuentran taxis se van inmediatamente (deciden irse en bus).

a) Modele el sistema como un proceso de nacimiento y muerte.

b) Encuentre el número promedio de taxis que están esperando por pasajeros en un momento cualquiera del día.

c) Suponga que todos los pasajeros que usan un taxi pagan una tarifa de $4.000. ¿cuánto dinero por hora recauda la empresa de taxis en promedio?.

19. Considere un sistema de espera M/M/1/2 con tasa de llegada λ [clientes / hora] y tasa de atención μ [clientes / hora].

a) Si $\lambda = \mu$. ¿Existen probabilidades estacionarias?. Por qué. En caso de que existan, cuánto valen y cuál es el número esperado de clientes en el sistema (L) y el tiempo promedio de permanencia de los clientes en el sistema (W).

Suponga que las personas que llegan al sistema pueden clasificarse en dos grupos: clientes Tipo I y clientes Tipo II. Existe una probabilidad fija p que un cliente que llega sea Tipo I. Debido a que los clientes Tipo I son más importantes que los Tipo II se ha optado por un sistema de atención que priorice la atención de los clientes Tipo I. La forma en que opera este sistema de prioridad es el siguiente: Si un cliente Tipo I entra al sistema y encuentra al servidor atendiendo un cliente Tipo II entonces se suspende la atención del cliente Tipo II y se atiende al cliente Tipo I. El cliente Tipo II deberá esperar que no hayan clientes Tipo I para retomar su atención.

Suponga que el sistema mantiene una capacidad de dos clientes, que los tiempos de atención de los dos tipos de clientes siguen siendo exponenciales con tasa $\lambda = \mu$ personas por hora y que un cliente que entra al sistema (Tipo I o Tipo II) abandona el sistema sólo si ha recibido la atención del servidor.

b) Muestre que el sistema anterior puede modelarse como una cadena de Markov en tiempo continuo y calcule las probabilidades estacionarias del sistema.

c) Muestre que el número promedio de entidades en el sistema (Tipo I o Tipo II) y el tiempo promedio de permanencia en el sistema de una entidad promedio para los casos con y sin prioridad son iguales. ¿Por qué?.

d) ¿Cuál debe ser el valor de p para que el tiempo de permanencia en el sistema de una entidad Tipo I sea igual al 50 % del tiempo de permanencia de una Tipo II.

20. Una fina joyería que recibe infrecuentes pero caros pedidos utiliza la siguiente política de inventario. Mantiene un stock de seguridad de S y cada vez que recibe un pedido por una unidad (demanda de un cliente), pone una orden en el taller para producir otra unidad. Los pedidos se distribuyen Poisson de tasa λ y el tiempo que demora la fabricación de una unidad se distribuye exponencial de media $1/\mu$.

Además existe un costo por tener inventario (costo de oportunidad) de h [$] por unidad por unidad de tiempo y un costo por no tener unidades disponibles en el momento que un cliente lo requiera (si el stock cayó a cero) igual a p [$]. Se supone que los clientes que hacen un pedido pero que encuentran que no hay ninguna unidad inmediatamente disponible, esperan a que lleguen las unidades pedidas al taller. Es decir, el costo p [$] es un descuento fijo que se le hace al cliente por hacerlo esperar.

Sea z el nivel de inventario en estado estacionario, que es positivo cuando hay unidades en la joyería y negativo cuando sólo hay unidades en pedido al taller. Sea $p(z)$ su función de probabilidad.

a) Calcule en función de z y $p(z)$, el costo esperado de inventario por unidad de tiempo.

b) Calcule en función de z y $p(z)$, el costo esperado por unidad de tiempo debido a la espera impuesta a los clientes.

c) Entregue una expresión, en función de z y $p(z)$, para el costo total esperado por unidad de tiempo ($E(C)$).

d) Si determinamos $p(z)$ podríamos determinar $E(C)$ en función de S, que es la variable de decisión. Para ello, en primer lugar, muestre la relación entre z y n, en que n es el número de órdenes procesándose en el taller. Por lo tanto, relacione $p(z)$ con p_n.

e) Muestre que p_n son las probabilidades estacionarias de una cola $M/M/\infty$, si se considera el proceso de pedidos al taller como una cola. Explicite los procesos de llegada y atención de este proceso y calcule las probabilidades estacionarias.

f) Con lo obtenido en las partes anteriores, formule el problema de optimización que le permita encontrar el valor óptimo de S.

21. (*) A una fiesta muy particular asisten M parejas. Cada pareja toma la decisión de ir a la pista de baile independiente de las demás. El tiempo que pasa hasta que cada pareja se decide a salir a bailar es una variable aleatoria de distribución exponencial de parámetro λ(1/min). Por otro lado, el tiempo que permanece cada pareja bailando es una variable aleatoria de distribución exponencial de media $1/\mu$(min).

Cuando una pareja deja de bailar inicia un nuevo proceso para decidir si salir a la pista nuevamente (con la misma distribución de probabilidades), y así sucesivamente.

Por último suponga que la capacidad de la pista es suficiente, como para que todas las parejas este bailando al mismo tiempo, y que la fiesta dura por mucho tiempo.

a) Modele la cantidad de parejas bailando en cualquier instante como una Cadena de Markov en tiempo Continuo.

b) Justifique la existencia de probabilidades estacionarias y encuentre las expresiones que le permitan calcularlas.

En lo que sigue considere que las probabilidades estacionarias toman valores conocidos.

c) El número promedio de parejas que se encuentran en la pista en un instante cualquiera.

d) La probabilidad de que exista igual número de parejas bailando y sentadas en un instante cualquiera.

e) La tasa media de ingreso de parejas a la pista.

f) La tasa media de salida de parejas desde la pista de baile.

22. Una empresa de computación funciona con turnos, de manera que siempre hay M empleados trabajando, todos los cuales necesitan tomar café durante su jornada laboral, según tiempos iid exponenciales de tasa λ.

Para satisfacer esta demanda por café, la empresa dispone de una pequeña cafetería, con capacidad C, pero donde pueden tomar café sólo c empleados simultáneamente ($c \leq C \leq M$). El tiempo que demora un empleado en tomar café es una variable aleatoria con una tasa $(i+1) \cdot \mu$ donde i es el número de personas que está dentro de la cafetería *esperando* poder servirse un café (es decir, los empleados se "apuran" si hay gente esperando).

a) Modele la situación como una Cadena de Markov en Tiempo Continuo. Escriba explícitamente las tasas de transición, argumente bajo qué condiciones existirán probabilidades estacionarias y escriba el sistema de ecuaciones que permitiría encontrarlas.

b) En términos de las probabilidades estacionarias, calcule el tiempo esperado que transcurre desde que a una persona en particular le dan ganas de ir a tomar café hasta que vuelve a su puesto de trabajo.
Hint: Suponga que los traslados son instantáneos y que si una persona no puede entrar a la cafetería vuelve inmediatamente a su oficina.

El jefe de recursos humanos se ha dado cuenta que los empleados que vuelven a su oficina sin haber podido tomar su café producen menos que aquellos que sí satisficieron su necesidad de cafeína. De manera que cada trabajador *feliz* produce a una tasa de α_f [$] por unidad de tiempo, mientras que cada trabajador *molesto* por no haber podido tomar café produce a una tasa menor de α_m [$]. Durante el tiempo en que los empleados que se encuentran en la cafetería no producen nada.

Interesa poder determinar la capacidad de la cafetería, así como el número de empleados que pueden atenderse simultáneamente, es decir C y c, con el fin de maximizar los ingresos esperados por unidad de tiempo en el largo plazo. Para esto conteste las siguientes preguntas:

c) Modele la situación como una Cadena de Markov en Tiempo Continuo. Escriba explícitamente las tasas de transición y argumente bajo qué condiciones existirán probabilidades estacionarias.
Hint: No es necesario que dibuje toda la cadena, puede limitarse a los casos interesantes.

d) Si aumentar C y c no tiene ningún costo, y $\alpha_m = 0$ ¿Cuál es el máximo ingreso esperado por unidad de tiempo al que puede aspirar la compañía?. ¿Qué acciones debe realizar para alcanzarlos?. Explique si es válido su razonamiento si $\alpha_m > 0$.

e) ¿Cómo cambia su respuesta a la parte anterior si $\alpha_m = 0$, pero existe un costo unitario por aumentar C igual a K y un costo unitario por aumentar c de k?.

23. (*) En Estados Unidos existen dos partidos políticos que concentran la gran mayoría de las preferencias electorales (alrededor del 95 %): el partido demócrata y el republicano. Por lo tanto, supondremos que la gente sólo vota por alguno de estos dos partidos.

Se sabe que la población electoral norteamericana es bastante flexible y ocasionalmente cambia sus preferencias electorales, de acuerdo a las circunstancias. Por ello, supondremos que un votante republicano (que vota por ese partido) cambiará su preferencia, pasando a ser un votante demócrata en un tiempo aleatorio exponencialmente distribuido de media $1/\lambda$. Por su parte, un votante demócrata pasara a ser un votante republicano en un tiempo aleatorio exponencialmente distribuido de media $1/\mu$. Suponga que el total de la población electoral de Estados Unidos es de tamaño N.

a) Modele la dinámica de la población electoral de Estados Unidos (el número de votantes demócratas en cada instante) como una cadena de Markov en tiempo continuo. Dibuje el diagrama de estados con las tasas de transición respectivas.

b) Calcule las probabilidades estacionarias. ¿Cuál es la probabilidad que una elección sea ganada por el partido demócrata en el largo plazo?. Suponga que el número total de votantes es N.

c) Para el caso $\lambda = \mu$, muestre que la distribución de las probabilidades estacionarias es binomial de parámetros $N,\ 1/2$. Interprete el resultado. Entregue la esperanza del número de votantes demócratas en el largo plazo y la probabilidad que una elección sea ganada por el partido demócrata.

d) En el mismo modelo anterior ahora sabemos que una persona nace independiente de todo lo demás, de acuerdo a un tiempo aleatorio exponencialmente distribuida de media $1/a$. De la misma manera una persona muere de acuerdo a un tiempo exponencialmente distribuido de media $1/b$. Si cada individuo que nace tiene iguales posibilidades de ser republicano o demócrata, modele la situación anterior como una cadena de Markov de tiempo continuo.

24. Considere una cola M/G/1 cuya disciplina de atención es LCFS (último que llega, primero en atenderse). Es decir, clientes llegan según un proceso de Poisson de tasa λ y la llegada de un cliente interrumpe al cliente que se está atendiendo para atenderse. Cuando su servicio termina, el cliente que se estaba atendiendo y fue interrumpido, retoma su servicio desde donde había quedado. Los tiempos de atención son variables aleatorias X_i iid de media $E(X)$. Suponga que $\lambda \cdot E(X) < 1$.

a) Encuentre el tiempo medio entre períodos ocupados (el tiempo transcurrido hasta una nueva llegada después que el sistema se vacía).

b) Encuentre la fracción promedio de tiempo que el sistema está ocupado.

c) Encuentre el tiempo medio de duración de un período ocupado ($E(B)$). Indicación: use (a) y (b).

d) Explique por qué un cliente que comienza un período ocupado, se queda en el sistema por toda la duración de éste. Use lo anterior para encontrar el tiempo medio de permanencia en el sistema, de un cliente que llega cuando el sistema está vacío.

e) ¿Existe alguna dependencia estadística entre el tiempo de permanencia en el sistema de un cliente y el número de clientes dentro del sistema a su llegada?.

f) Muestre que el tiempo medio de permanencia de un cliente en el sistema es igual a $E(B)$. Indicación: Utilice sus respuestas de (d) y (e).

g) Sea C el tiempo medio de permanencia de un cliente en el sistema condicional en que su tiempo de atención X es 1. Encuentre (en términos de C) el tiempo medio de permanencia de un cliente en el sistema, condicional en $X = 2$. Indicación: compare un cliente con $X = 2$ con dos clientes con $X = 1$. Extienda para un valor arbitrario de X.

h) Encuentre la constante C. Indicación: Use (f) y (g), sin realizar cálculos tediosos.

2. Resolución problemas Nacimiento y Muerte

■ **7.** *a*) De acuerdo al enunciado, la cadena es la que semuestra en la figura.

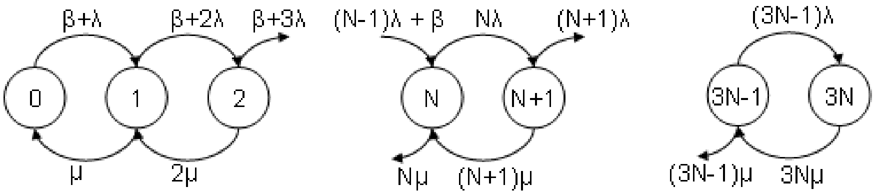

Figura 1: Cadena problema 7-1

Respecto a la condición de estacionaridad, estamos frente a una cadena finita, por lo que existirán probabilidades estacionarias (dado que es irreductible)

b) Dado que se trata de un proceso de nacimiento y muerte utilizamos las fórmulas conocidas. Entonces, con un poco de desarrollo vemos que:

$$\pi_i = \begin{cases} \frac{\prod_{k=0}^{i-1}(\beta+k\lambda)}{i!\mu^i} \cdot \pi_0 & si \quad 0 < i \leq N \\ \frac{\prod_{k=0}^{N-1}(\beta+k\lambda)\cdot\lambda^{i-N}}{i\cdot(N-1)!\cdot\mu^i} \cdot \pi_0 & \sim \end{cases}$$

Donde

$$\pi_0 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N} \frac{\prod_{k=0}^{i-1}(\beta+k\lambda)}{i!\mu^i} + \sum_{i=N+1}^{3N} \frac{\prod_{k=0}^{N-1}(\beta+k\lambda)\cdot\lambda^{i-N}}{i\cdot(N-1)!\cdot\mu^i}}$$

c) En este caso la cadena esla que se muestra en la figura.

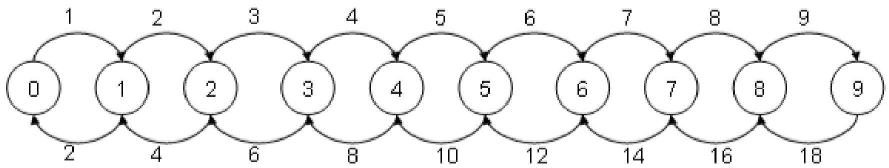

Figura 2: Cadena problema 7-2

Las ecuaciones de estado estacionario son las siguientes:

$$\pi_i \quad = \quad (\frac{1}{2})^i \cdot \pi_0$$

Entonces:

$$\pi_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{9} \frac{1}{2}^9} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}^{10}}$$

Conocidas las probabilidades estacionarias vemos que la fraccion del tiempo que no pueden ingresar el primer tipo de fanáticos es:

$$\sum_{k=3}^{9} \pi_i$$

■ **8.** *a*) El estado del sistema corresponde a la cantidad de mascotas presentes. Con esto, el modelo de markov se muestra en la figura.

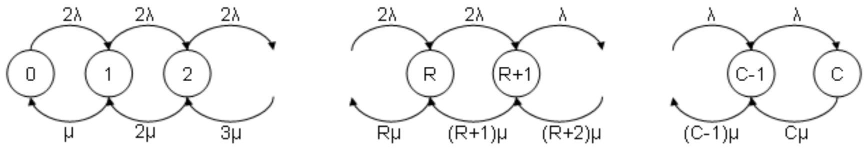

Figura 3: Cadena problema 8-1

Más formalmente, para este modelo, las probabilidades de transición pueden escribirse como:

$$\begin{aligned} q_{i,i-1} &= i\mu \\ q_{i,i+1} &= \begin{cases} \lambda & i < R \\ 2\lambda & i > R \end{cases} \end{aligned}$$

b) El sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \lambda_i \pi_i &= \mu_{i+1}\pi_1 && i = 0 \\ (2\lambda + i\mu)\pi_i &= 2\lambda\pi_i - 1 + i\mu && i < R \\ (\lambda + i\mu)\pi_i &= 2\lambda\pi_i - 1 + i\mu && i = R \\ (2\lambda + i\mu)\pi_i &= 2\lambda\pi_i - 1 + i\mu && i > R \end{aligned}$$

Como es un proceso de nacimiento y muerte, podemos aplicar que:

$$\pi_i = \frac{\lambda_0\lambda_1 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1\mu_2 \cdots \mu_n}\pi_0 \qquad \pi_0 = \left(1 + \sum_{n=1}^{C} \frac{\lambda_0\lambda_1 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1\mu_2 \cdots \mu_n}\right)^{-1}$$

Luego, las probabilidades estacionarias para este problema vienen dadas por:

$$\pi_i = \begin{cases} \frac{(2\lambda)^i}{i!\mu^i}\pi_0 & i \leq R+1 \\ \frac{2^{R+1}(\lambda)^i}{i!\mu^i}\pi_0 & i > R+1 \end{cases} \qquad \text{donde } \pi_0 = \left(1 + \sum_{n=1}^{R+1} \frac{(2\lambda)^i}{i!\mu^i} + \sum_{i=R+2}^{C} \frac{2^{R+1}(\lambda)^i}{i!\mu^i}\right)^{-1}$$

c) Calculamos la cantidad promedio de perros en la tienda:

$$L = \sum_{i=0}^{c} i\pi_i$$

Luego aplicamos la fórmula de little para obtener el tiempo de espera medio:

$$W = \frac{1}{\tilde{\lambda}}L \qquad \text{con } \tilde{\lambda} = 2\lambda\left(\sum_{i=0}^{R}\pi_i\right) + \lambda\left(\sum_{i=R+1}^{C}\pi_i\right)$$

d) El problema de optimización viene dado por:

$$\max_R \sum_{i=0}^{C} \pi_i(i(\mu P - K))$$

$$\begin{aligned} \text{s.a} \quad R &\leq C \\ R &\in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

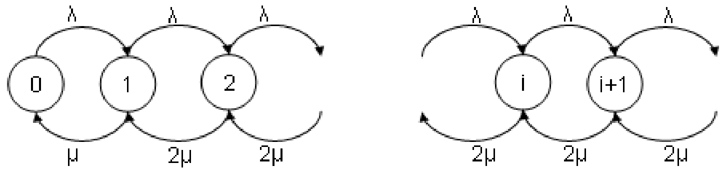

Figura 4: Cadena problema 10-1

■ **10.** Primero debemos notar que el sistema en cuestión es una cola del tipo M/M/2 como la que se muestra en la figura .

a) Como condición de estado estacionario debemos imponer que:

$$\frac{\lambda}{2\cdot\mu}$$

b) Los resultados para la M/M/2 son conocidos:

$$\pi_i = 2\cdot\rho^i\cdot\pi_0 \qquad i\neq 0$$

Donde:

$$\begin{aligned}\pi_0 &= \frac{1}{1+2\cdot\sum_{i=1}^{\infty}\rho^i}\\ \pi_0 &= \frac{1-\rho}{1+\rho}\end{aligned}$$

con $\rho = \frac{\lambda}{2\cdot\mu}$.
Por otro lado, del enunciado sabemos que $\pi_0 = 0{,}1$ Por lo tanto igualando términos obtenemos que:

$$\frac{1-\rho}{1+\rho} = 0{,}1 \Rightarrow \lambda \approx 1{,}64$$

c) Si calculamos el número medio de personas en el sistema, tendremos que:

$$L = \sum_{k=0}^{\infty}\pi_k\cdot k = \frac{\rho}{1-\rho^2}$$

Entonces utilizando Little tendremos que:

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{\rho}{(1-\rho)\cdot\lambda}$$

Pero este W es el tiempo promedio en el sistema, entonces tenemos que restarle el tiempo de atención. Luego el tiempo promedio de espera será:

$$W_{Cola} = W - \frac{1}{\mu}$$

d) En este caso la cadena se muestra en la figura.
Claramente aquí no hay que imponer condición de estado estacionario (dado que la tasa de atención aumenta indefinidamente a medida que el sistema se llena, mientras que la tasa de llegada permanece constante).

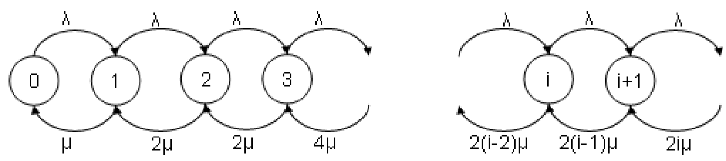

Figura 5: Cadena problema 10-2

e) Las ecuaciones de estado estacionario (nacimiento y muerte) son las siguientes:

$$\begin{aligned}
\pi_1 &= \frac{\lambda}{\mu}\pi_0 \\
\pi_2 &= \frac{1}{2}(\frac{\lambda}{\mu})^2\pi_0 \\
\pi_i &= (\frac{\lambda}{\mu})^i \prod_{k=3}^{i} \cdot \frac{1}{2(k-2)} \qquad i > 2
\end{aligned}$$

Con:

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{1}{2}(\frac{\lambda}{\mu})^2 + \sum_{i=3}^{\infty}(\frac{\lambda}{\mu})^i \prod_{k=3}^{i} \cdot \frac{1}{2(k-2)}}$$

Ahora si igualamos la expresión de π_0 al valor dado (0.1) obtendríamos el valor de λ (mismo procedimiento que en la parte anterior).

■ **11.** *a*) En esta parte debemos distinguir las transiciones caso a caso. Lamentablemente tenemos 10 casos:
Caso 1:

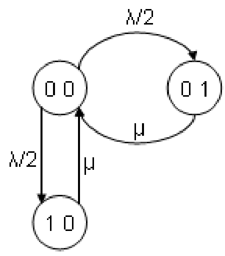

Figura 6: caso 1

Caso 2:

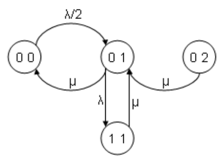

Figura 7: caso 2

Caso 3:

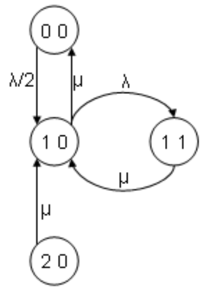

Figura 8: caso 3

Caso 4, $\forall i \geq 2$:

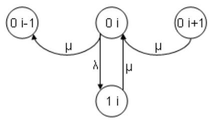

Figura 9: caso 4

Caso 5, $\forall i \geq 2$:

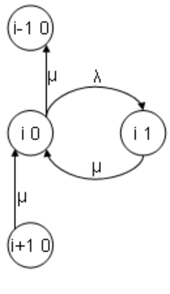

Figura 10: caso 5

Caso 6, $\forall i \geq 1$:

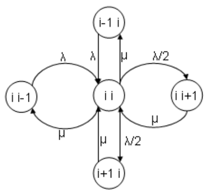

Figura 11: caso 6

Caso 7, $\forall i \geq 2$:

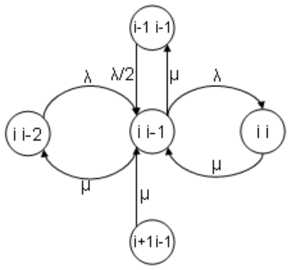

Figura 12: caso 7

Caso 8, $\forall i \geq 1$:

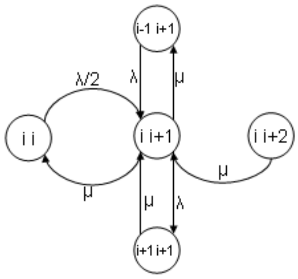

Figura 13: caso 8

Caso 9, $\forall i \geq 1 \quad j > 2 \quad j - i \geq 2$:

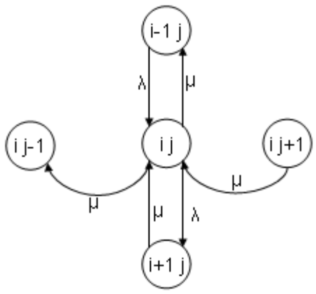

Figura 14: caso 9

Caso 10, $\forall i > 2 \quad j \geq 1 \quad i - j \geq 2$:

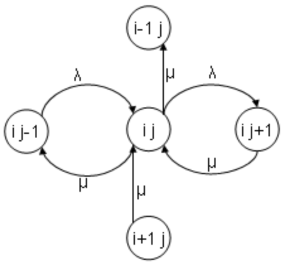

Figura 15: caso 10

b) Planteando las ecuaciones de conservación de flujo para cada uno de los casos particulares de la parte 1, se tiene que el sistema es:

$$
\begin{aligned}
\pi_{0,0} \cdot \lambda &= \pi_{0,1} \cdot \mu + \pi_{1,0} \cdot \mu \\
\pi_{0,1} \cdot (\lambda + \mu) &= \pi_{0,0} \cdot \frac{\lambda}{2} + \pi_{0,2} \cdot \mu + \pi_{1,1} \cdot \mu \\
\pi_{1,0} \cdot (\lambda + \mu) &= \pi_{0,0} \cdot \frac{\lambda}{2} + \pi_{1,1} \cdot \mu + \pi_{2,0} \cdot \mu \\
\pi_{0,i} \cdot (\lambda + \mu) &= \pi_{1,i} \cdot \mu + \pi_{0,i+1} \cdot \mu \\
\pi_{i,0} \cdot (\lambda + \mu) &= \pi_{i,1} \cdot \mu + \pi_{i+1,0} \cdot \mu \\
\pi_{i,i} \cdot (\lambda + 2\mu) &= \pi_{i,i-1} \cdot \lambda + \pi_{i-1,i} \cdot \lambda + \pi_{i,i+1} \cdot \mu + \pi_{i+1,i} \cdot \mu \\
\pi_{i,i-1} \cdot (\lambda + 2\mu) &= \pi_{i,i-2} \cdot \lambda + \pi_{i-1,i} \cdot \frac{\lambda}{2} + \pi_{i,i} \cdot \mu + \pi_{i+1,i-1} \cdot \mu \\
\pi_{i,i+1} \cdot (\lambda + 2\mu) &= \pi_{i,i} \cdot \frac{\lambda}{2} + \pi_{i-1,i+1} \cdot \lambda + \pi_{i+1,i+1} \cdot \mu \\
\pi_{i,j} \cdot (\lambda + 2\mu) &= \pi_{i-1,j} \cdot \lambda + \pi_{i,j+1} \cdot \mu + \pi_{i+1,j} \cdot \mu \\
\pi_{i,j} \cdot (\lambda + 2\mu) &= \pi_{i,j-1} \cdot \lambda + \pi_{i+1,j} \cdot \mu + \pi_{i,j+1} \cdot \mu \\
\sum_{i,j} \pi_{i,j} &= 1
\end{aligned}
$$

Para encontrar la condición de régimen estacionario el caso relevante es cuando las dos colas están ocupadas. En este caso las llegadas al sistema son con tasa λ y las salidas con tasa 2μ (mínimo de las dos cajas), luego la condición de régimen estacionario es :

$$\lambda \leq 2\mu$$

c) La fracción del tiempo en que la cola 1 esta vacía está dado por :

$$\sum_i \pi_{0,i}$$

■ **12.** *a*) La cadena que modela el número de centrales en reparación se muestra en la figura (las tasas de transición son las especificadas en la figura).

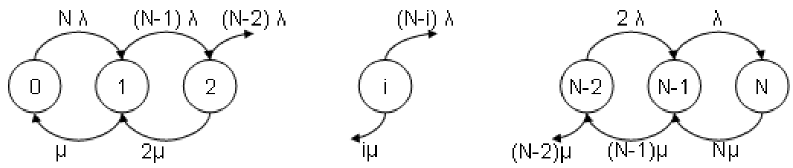

Figura 16: Cadena problema 12-1

Para esta cadena basta que las tasas λ y μ sean mayores que 0 para que exista estado estacionario.[1] Dado que este es un proceso de nacimiento y muerte, las probabilidades estacionarias toman la siguiente forma:

$$\pi_k = \binom{N}{k}(\frac{\lambda}{\mu})^k \cdot \pi_0$$

Donde:

$$\pi_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}(\frac{\lambda}{\mu})^k}$$

Reconociendo el binomio de Newton se llega a:

$$\pi_0 = \frac{1}{(1+\frac{\lambda}{\mu})^N}$$

b) En promedio las Centrales demoran $\frac{1}{\mu}$ horas en ser reparadas[2]

c) El número de fallas por unidad de tiempo será:

$$E(\text{Fallas/hora}) = \sum_{k=0}^{N} \pi_k \cdot \lambda \cdot (N-k) = N \cdot \lambda - \sum_{k=0}^{N} \frac{\binom{N}{k}(\frac{\lambda}{\mu})^k}{(1+\frac{\lambda}{\mu})^N} \cdot \lambda \cdot k$$

Factorizando por λ y reconociendo la forma de la esperanza de una binomial (N, $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$), se llega al siguiente resultado:

$$E(\text{Fallas/hora}) = \lambda \cdot N \cdot (1 - \frac{\lambda}{\lambda+\mu}) = \lambda \cdot N \cdot \frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

d) Little dice $L = W \cdot \overline{\lambda}$. En la parte b se calculó W. En la parte d se calculó $\overline{\lambda}$. Entonces ocupando nuestros sofisticados conocimientos algebraicos se tiene:

$$L = \frac{N \cdot \lambda}{\lambda + \mu}$$

e) Para responder esta pregunta existen muchas alternativas (intuición, Teoría de renovación, suerte, etc.). En esta pseudo-pauta construiremos una cadena que represente el estado de un Central en particular. La cadena se muestra en la figura.
Resolviendo el pseudo-sistema de ecuaciones se tiene que:

$$\pi_{falla} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

[1] Dado que la cadena es finita e irreductible
[2] Lo dice el enunciado!!

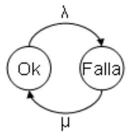

Figura 17: Cadena problema 12-2

■ **15.** *a*) En estado estacionario la tasa de salida de clientes tiene que ser igual a la tasa de llegadas puesto que si esto no ocurriese se estarían acumulando clientes en el sistema o estarían saliendo entidades inexistentes.

b) La situación descrita corresponde a una cola del tipo M/M/2/C. La figura a continuación describe la dinámica del sistema en la figura.

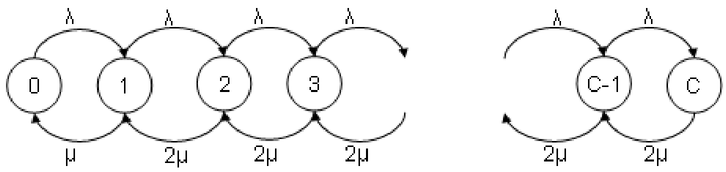

Figura 18: Cadena problema 15-1

Para este sistema las ecuaciones de estado estacionario serán(Usamos las fórmulas de procesos de nacimiento y muerte):

$$\pi_i = \frac{\lambda^i}{2^{i-1}\mu^i} \cdot \pi_0 \quad \forall i \neq 0$$

Donde:

$$\begin{aligned}
\pi_0^{-1} &= 1 + \sum_{i=1}^{C} \frac{\lambda^i}{2^{i-1}\mu^i} \\
\pi_0^{-1} &= 2 \cdot \sum_{i=0}^{C} (\frac{\lambda}{2\mu})^i - 1 \\
\pi_0^{-1} &= 2 \cdot \frac{1-\rho^{C+1}}{1-\rho} - 1
\end{aligned}$$

Con $\rho = \frac{\lambda}{2\mu}$.

c) En esta pregunta nos piden comparar entre una M/M/2 con tasa de atención μ y una M/M/1 con tasa de atención $2 \cdot \mu$. Los sistemas correspondientes se muestran en la figura 19 y figura.

Las probabilidades estacionarias son las siguientes:

$$\pi_i = \frac{\lambda^i}{2^{i-1}\mu^i} \cdot \pi_0 \quad \forall i \neq 0$$

Donde:

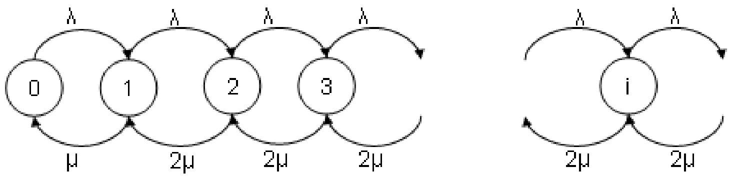

Figura 19: Cadena problema 15-2

$$\begin{aligned}
\pi_0^{-1} &= 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^i}{2^{i-1}\mu^i} \\
\pi_0^{-1} &= 2 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (\frac{\lambda}{2\mu})^i - 1 \\
\pi_0^{-1} &= 2 \cdot \frac{1}{1-\rho} - 1
\end{aligned}$$

Entonces:

$$\pi_0 = \frac{1-\rho}{1+\rho}$$

Con $\rho = \frac{\lambda}{2\mu}$
Calculamos el largo esperado de la cola:

$$L = \sum_{i=1}^{\infty} 2i \cdot \rho^i \cdot \frac{1-\rho}{1+\rho}$$

Con un poco de álgebra llegamos a que $L = 2\frac{\rho}{1-\rho^2}$

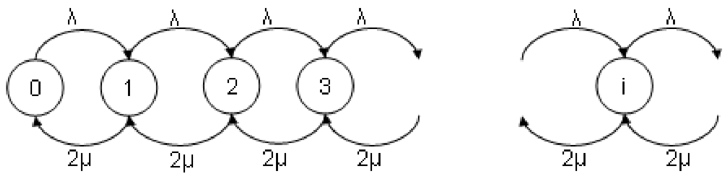

Figura 20: Cadena problema 15-3

Se puede demostrar que los resultados para una M/M/1 son:

$$\pi_i = \rho^i \cdot (1-\rho) \quad \forall i$$

Entonces:

$$L = \frac{\rho}{1-\rho}$$

En este caso $\rho = \frac{\lambda}{2 \cdot \mu}$
Si se comparan las soluciones de ambos casos se encuentra que el sistema con un solo empleado es mejor. La razón?... basta mirar el caso cuando hay un solo cliente.

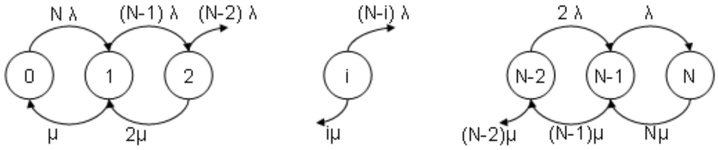

Figura 21: Cadena problema 21

■ **21.** *a*) Siguiendo el enunciado modelamos la cantidad de parejas bailando en un instante determinado. La cadena resultante se muestra en la figura.

b) En este caso basta con notar que la cadena es finita, por lo tanto tendrá ley de probabilidades estacionarias.

Respecto a las expresiones de las mismas utilizamos las fórmulas de los procesos de nacimiento y muerte. De esta forma tendremos que:

$$\begin{aligned} \pi_i &= \frac{M \cdot (M-1) \cdot (M-2)...(M-i+1) \cdot \lambda^i}{1 \cdot 2 \cdot 3...i \cdot \mu^i} \cdot \pi_0 \\ &= \binom{M}{i}(\frac{\lambda}{\mu})^i \pi_0 \end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \frac{1}{\sum_{i=1}^{M}(\frac{\lambda}{\mu})^i} \\ &= (\frac{\mu}{\lambda+\mu})^M \end{aligned}$$

Entonces:

$$\pi_i = \binom{M}{i}(\frac{\lambda}{\lambda+\mu})^i \cdot (\frac{\mu}{\lambda+\mu})^{M-i}$$

Donde reconocemos una distribución binomial de parámetros $(M, \frac{\lambda}{\lambda+\mu})$

c) El número promedio de parejas bailando simplemente es la esperanza de la binomial, es decir:

$$E[\text{Parejas bailando}] = M \cdot \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

d) Inmediatamente nos damos cuenta que si M es impar la probabilidad es 0. Si M es par, entonces:

$$P[\text{Igual número de parejas sentadas que bailando}] = \binom{M}{\frac{M}{2}}(\frac{\lambda}{\lambda+\mu})^{\frac{M}{2}} \cdot (\frac{\mu}{\lambda+\mu})^{\frac{M}{2}}$$

e) La tasa media de entrada de parejas a la pista será:

$$\begin{aligned} Tasa_{IN} &= \sum_{i=0}^{M} \pi_i \cdot (M-i)\lambda \\ &= \sum_{i=0}^{M} \binom{M}{i}(\frac{\lambda}{\lambda+\mu})^i \cdot (\frac{\mu}{\lambda+\mu})^{M-i} \cdot (M-i)\lambda \\ &= M\lambda - M\lambda \cdot \frac{\lambda}{\mu+\lambda} \\ &= M\lambda(\frac{\mu}{\mu+\lambda}) \end{aligned}$$

f) La tasa media de salida de parejas de la pista será:

$$\begin{aligned}
Tasa_{IN} &= \sum_{i=0}^{M} \pi_i \cdot i \cdot \mu \\
&= \sum_{i=0}^{M} \binom{M}{i} (\frac{\lambda}{\lambda+\mu})^i \cdot (\frac{\mu}{\lambda+\mu})^{M-i} \cdot i \cdot \mu \\
&= M\mu(\frac{\lambda}{\mu+\lambda})
\end{aligned}$$

Claramente la tasa media de entrada a la pista es igual a la tasa media de salida de la pista. Si no, no existiría estado estacionario.

■ **23.** *a*) Los estados del sistema quedan definidos como:
(i) : Número de demócratas en el sistema.
De esta forma la cadena es la que se muestra en la figura.

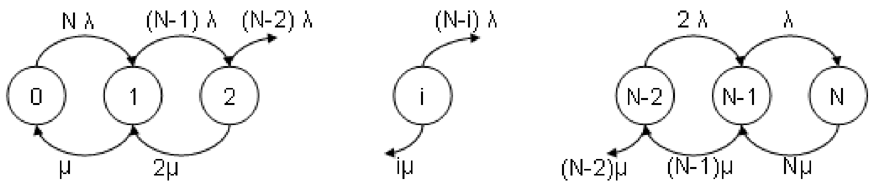

Figura 22: Cadena problema 23-1

Para un estado en particular donde existen i demócratas se tendrá que la transición entre el estado i y el $i+1$ ocurre cuando alguno de los $N-i$ republicanos decide cambiarse de bando, lo que ocurre con tasa $(N-i)\cdot\lambda$. De la misma forma la transición entre el estado i y el $i-1$ ocurre cuando alguno de los i demócratas decide cambiarse de bando, lo que ocurre con tasa $i\cdot\mu$. Esto se muestra en la figura.

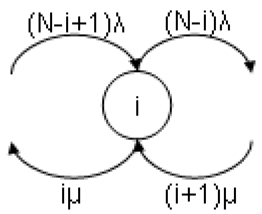

Figura 23: Cadena problema 23-2

Dado que el proceso anterior es de nacimiento y muerte se pueden aplicar las fórmulas para las probabilidades estacionarias.

$$\pi_i = \prod_{k=1}^{i} (\frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k}) \cdot \pi_0$$

$$\Rightarrow \quad \pi_i = \frac{N\cdot(N-1)\cdot(N-2)...\cdot(N-i)\cdot\lambda^i}{i\cdot(i-1)\cdot(i-2)...\cdot 2\cdot 1\cdot\mu^i} \cdot \pi_0$$

$$\Rightarrow \quad \pi_i = \frac{N! \cdot \lambda^i}{(N-i)! \cdot i! \cdot \mu^i} \cdot \pi_0 \;=\; \binom{N}{i}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \cdot \pi_0$$

donde $\pi_0 = \frac{1}{(1+\frac{\lambda}{\mu})^N}$ se encuentra ocupando el binomio de Newton y que la suma de las probabilidades estacionarias es 1.

b) De esta manera, la probabilidad de que los demócratas ganen las elecciones será igual a encontrarse en algún estado con más demócratas que republicanos, es decir:

$$\sum_{i=\frac{N}{2}+1}^{N} \pi_i \text{ ó } \sum_{i=\frac{N+1}{2}}^{N} \pi_i$$

En caso de que N sea par o impar respectivamente. Notar que en el caso par si el número de votantes demócratas es $\frac{N}{2}$ la elección se empata.

c) si $\lambda = \mu \Rightarrow \pi_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^N$

De esta manera $\pi_k = \binom{N}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{N-k} \rightsquigarrow B(N, \frac{1}{2})$

En el largo plazo, dado que una persona se cambia de partido con probabilidad $\frac{1}{2}$ tener, por ejemplo, 20 personas de N votando por el partido demócrata es equivalente a tirar N veces una moneda y contar 20 sellos.

Por esto la probabilidad de ganar será $\frac{1}{2}$ en el caso de N impar, mientras que si N es par como existe alguna probabilidad de empatar debemos pensar en

$$2 \cdot P(ganar) + P(empatar) = 1$$

donde la probabilidad de empatar viene dada por:

$$P(empatar) = \binom{N}{\frac{N}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^N$$

d) Cuando permitimos que el número de personas cambie vía nacimientos y muertes la cadena de la parte anterior ya no sirve puesto que es necesario saber no sólo el número de demócratas sino la cantidad total de votantes.

Una manera de modelar esta situación es utilizando una cadena de Markov continua con pares ordenados en cada nodo, que representen el número de demócratas y el número de republicanos respectivamente (D, R).

De esta manera, la población total será $N = D + R$ y las transiciones serán las que se muestran en el grafo de la figura. En estos casos la probabilidad de que los demócratas ganen una elección en el largo plazo será igual a:

$$\sum_{i>j} \pi_{(i,j)}$$

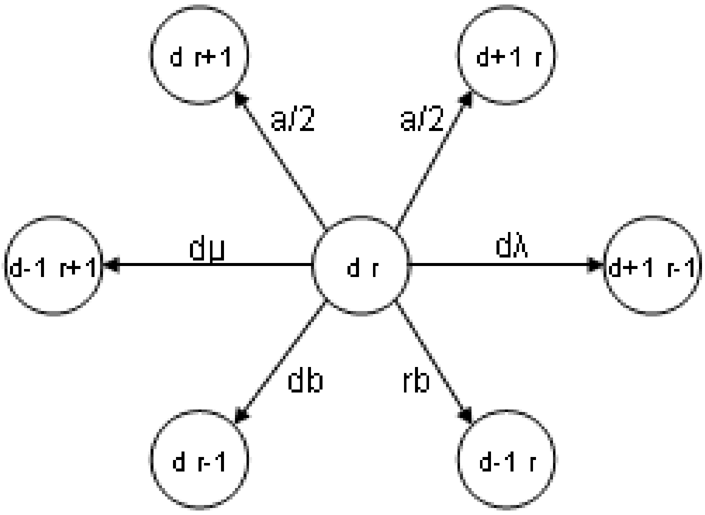

Figura 24: Cadena problema 23-3