# Auxiliar 10 - Dualidad y Flujo Máximo

*Profesores: Roberto Cominetti C., Victor Bucarey L.*

*Auxiliares: Alberto Vera A, Giorgiogiulio Parra De B, Juan Neme G, Pastor Lyon R, Paz Obrecht I*

## Problema 1: Formulación Como Flujo

Considere el problema clásico de facility location: se debe instalar una y sólo una fábrica para abastecer la mayor cantidad de demanda posible. Considere que dividimos en $V$ posibles localidades, para $i, j \in V$ se puede hacer transitar a lo más un peso de $p_{ij} \in [0, \infty]$ (por utilizaciones de puentes por ejemplo). Cada producto vendido genera un beneficio $b \in (0, \infty)$, a su vez que tiene un peso $p \in (0, \infty)$. Instalar la fábrica en la localidad $i \in V$ tiene un costo de $c_i \in (0, \infty)$. Por simplicidad suponemos que si la fbrica se instala en $i \in V$, entonces no vende productos en $i$.

1. Suponiendo que el lugar de la fábrica está fijo, formule el problema como uno de flujo máximo.
2. Muestre que el problema siempre tiene solución óptima. Imponga condiciones para que el problema siempre tenga óptimo finito. Explicite como se relaciona con el problema de corte mínimo.
3. Utilizando la parte (1), proponga un algoritmo polinomial para resolver el problema.

## Problema 2: Regresión Lineal

Un científico tiene una colección de datos $(x_t, y_t)$ $t = 1, \cdots, T$ y desea hacer una regresión lineal para encontrar una recta $y(x)$ de forma que el error sea mínimo, entendiendo por error la máxima distancia entre un punto $y_t$ y su aproximación $y(x_t)$

1. Plantee el problema como uno de programación lineal y obtenga su dual.
2. Muestre que el óptimo de problema dual está acotado inferiormente por 0.

## Problema 3: Sensibilidad con variables adicionales

Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ de rango completo, $b \in \mathbb{R}^m$ y $c \in \mathbb{R}^n$. Considere que el problema $(P)$ lo transformamos agregando una columna, vale decir, dada $H \in \mathbb{R}^m$ tenemos el problema $(\tilde{P})$

$$\begin{aligned} (P)\ \min\ & c'x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} (\tilde{P})\ \min\ & c'x \\ & Ax + Hy = b \\ & x, y \geq 0 \end{aligned}$$

1. Muestre que el valor óptimo de $(\tilde{P})$ es menor o igual que el de $(P)$
2. Sea $x^\star$ punto extremo óptimo no degenerado de $(P)$. Muestre que, para ciertos valores de $H$, la base óptima no cambia. Explicite el cambio en la función objetivo a partir de las variables duales de $(P)$.

| **Primal (min)** | | **Dual (max)** | |
|---|---|---|---|
| Restricciones | $\geq b_i$ | Variables | $\geq 0$ |
| | $\leq b_i$ | | $\leq 0$ |
| | $= b_i$ | | libre |
| Variables | $\geq 0$ | Restricciones | $\leq c_j$ |
| | $\leq 0$ | | $\geq c_j$ |
| | libre | | $= c_j$ |