IN3202 Microeconomía
Otoño 2013

Profesor: Juan Escobar
Auxiliares: Gian Luca Carniglia y Felipe Carrera

Control 1
Tiempo: 90 minutos

1. (30pts) Use sus conocimientos de teoría de juegos y no más de 5 renglones para responder las siguientes preguntas. Su respuesta no será evaluada si excede el límite o está escrita con letra ilegible.

   a. (10pts) En su reciente visita a Israel, Barack Obama llamó a un grupo de estudiantes en Jerusalen a alcanzar la paz entre Israel y Palestina. Les dijo: "Pónganse en sus zapatos (de los Palestinos) y miren el mundo a través de sus ojos." (Put yourself in their shoes an look at the world through their eyes.) Cuál es la teoría de juegos detrás de estra frase?

   Solución: La frase destaca un aspecto crucial del razonamiento estratégico: para decidir su estrategia óptima, un jugador debe ser capaz de ponerse en los zapatos de su rival, hacer los cálculos que el rival hace, y de ese modo inferir su movida. (De hecho, es precisamente esa lógica la que esta detrás de la solución por EIEED.) (10 puntos)

   b. (10pts) Discuta: "Las movilizaciones ocurridas durante el 2011 no son sorprendentes. De hecho podrían haber ocurrido en cualquier otro momento pues en un juego de coordinación el único EN que tiene sentido es el que Pareto domina."

   Solución: (Esta pregunta hace referencia al artículo del New York Times.)

   La idea es que movilizarse para obtener un cambio político o social puede ser modelado como un juego de coordinación, en el que cada agente prefiere movilizarse sólo si una masa crítica mínima lo hace tambien. (4 puntos)

   El equilibrio que es Pareto dominante es aquel en el que la población se moviliza, (ya que podemos suponer que en dicho caso se obtien cambio político). (2 puntos)

   Las movilizaciones del 2011 se explica en parte por la existencia de redes sociales y otros medios que permiten a los agentes comunicarse y asi poder coordinarse en el equilibrio que es socialmente atractivo. Sin esos medios, es difícil que una masa grande de gente se coordine en el buen equilibrio. (4 puntos)

   c. (10pts) Considere un juego en forma normal con un único EN $s^* \in S$. Usted sabe que todos los jugadores del juego son racionales y conocen los conjuntos de estrategias de sus rivales y sus funciones de utilidad. Explique por qué el resultado del juego podría ser distinto de s^*. Bajo que supuestos extras sobre los jugadores será s^* el resultado del juego?

   Solución: El resultado del juego podría ser distinto a s^* pues si el jugador i es racional pero no sabe que sus rivales lo son, entonces puede no jugar s_i^*. Por ejemplo, el siguiente juego posee un único EN dado por la solución de EIEESD, $s^* = \{(U, L)\}$

	L	M	R
U	$4,3$	$5,1$	$6,2$
M	$2,1$	$8,4$	$3,6$
D	$3,0$	$9,6$	$2,8$

   Si el jugador 1 es racional pero no sabe que 2 lo es tambien, 1 puede pensar, por ejemplo, que 2 jugará M y de ese modo, 1 jugará D. (6pts)

   El supuesto faltante para que s^* sea el resultado del juego es que haya conocimiento común de la racionalidad (1 sabe que 2 es racional, 1 sabe que 2 sabe que 1 es racional, ...) y que el juego tenga solución por EIEED. (4 puntos)

2. (30pts) Consideremos una gran población de individuos en lo que hoy se conoce como Inglaterra, tal que en cada momento del tiempo cada uno de ellos interactúa con otro en el siguiente juego del lenguaje. Los individuos simultáneamente deciden entre "(mountain,sea)" y "(sea,mountain)". Si escogen lo mismo sus pagos son 1, mientras que cualquier otro resultado da un pago de 0. Este juego modela una interacción en la que uno de los individuos quiere comunicar al otro donde hay algo que ambos desean (por ejemplo, alimento) y lo que desean se puede encuentrar en la montaña o en el mar. Los individuos deciden un lenguaje, siendo la primera componente de su decisión el término que usan para montaña y la segunda componente el término que usan para mar (así, "(sea,mountain)" es el lenguaje donde "sea" significa montaña). Si bien esta es una situación

asimétrica (uno habla y el otro escucha), el juego se modela como un juego simétrico pues una vez que se fijan los lenguajes los pagos son simétricos. (Por ejemplo, el lenguaje se escoge antes de saber quien habla y quien escucha)

a. (10pts) Encuentre los EN del juego.

Solución:

Los equilibrios de Nash en estrategias puras de este juego están dados por:

	(M,S)	(S,M)
(M,S)	$\underline{1},\underline{1}$	$0,0$
(S,M)	$0,0$	$\underline{1},\underline{1}$

Es decir: $N = \{((M,S),(M,S))\,;((S,M),(S,M))\}$

(10 puntos)

Notamos que este juego posee la estructura de un juego de coordinación.

b. (10pts) Un amigo le comenta que los EN encontrados en a. no tienen sentido pues el lenguaje no es una decisión estratégica. Explique cómo la teoría de juegos evolutiva permita justificar los EN encontrados. Explique la existencia de un lenguaje donde "mountain" significa "mar" y "sea" significa "montanã".

Solución:

Pese a que el lenguaje no proviene de una decisión estratégica, podemos considerar la interpretación de estategias evolutivamente estables que aplica a ciencias sociales: una estrategia evolutivamente estable es una predicción razonable en un mundo donde los individuos adoptan estrategias sin mayor razocinio, pero si una estrategia (mutación) tiene un pago promedio alto entonces tiende a propagarse y ser adoptada por el resto de la población (que comienza a imitarla). (5pts)

Ahora bien, los dos EN encontrados en (a) son estrictos y, por lo tanto, resultan en estrategias evolutivamente estables (5pts). Esta parte también se puede hacer usando la definición:

Partimos revisando el caso en el que una fracción $(1-x)$ de la población se encuentra coordinada en el lenguaje (M,S) y existe una fracción (x) que muta a ocupar el lenguaje (S,M)).

La condición para que $((M,S),(M,S))$ sea evolutivamente estable, está dada por:

$$U((M,S),x) > U((S,M),x)$$

Es decir, que la utilidad esperada de poseer la estrategia predominante en la población sea estríctamente mayor que la utilidad esperada de tener la mutación. De la matriz de pagos y los supuestos, obtenemos:

$$U((M,S),x) = (1-x)\cdot 1 + x\cdot 0 = (1-x)$$

$$U((S,M),x) = (1-x)\cdot 0 + x\cdot 1 = x$$

$$(1-x) > x$$

Ya que $x \approx 0$, por lo que el lenguaje (M,S) es evolutivamente estable.

Podemos apreciar que el problema es completamente simétrico para el caso del lenguaje (S,M).

En este caso, la condición que se tiene que cumplir para que sea evolutivamente estable, cuando una fracción $(1-x)$ de la población se encuentra coordinada en el lenguaje (S,M) y existe una fracción (x) que muta a ocupar el lenguaje (M,S)), es la siguiente.

$$U((S,M),x) > U((M,S),x)$$

$$U((S,M),x) = (1-x)\cdot 1 + x\cdot 0 = (1-x)$$

$$U((M,S),x) = (1-x)\cdot 0 + x\cdot 1 = x$$

De donde, nuevamente.

$$(1-x) > x$$

Es decir, ambos lenguajes son evolutivamente estables una vez que han sido adoptados por la población. Esto lo podemos entender como que en el contexto de este juego lo único relevante es que el lenguaje permita coordinar las acciones de los agentes, no teniendo ninguna relevancia las palabras particulares elegidas para expresar un determinado concepto.

c. (10pts) Encuentre todos los equilibrios evolutivamente estables en estrategies mixtas.

Solución:

Los candidatos a ser estrategias evolutivamente estables en mixtas serán los ENEM del juego.

Encontramos el ENEM del juego igualando los pagos de las estrategias puras, cuando el otro jugador está jugando la estrategia mixta p.

$$U((S,M),p) = p \cdot 1 + 0 \cdot (1-p) = p$$
$$U((M,S),p) = p \cdot 0 + 1 \cdot (1-p) = (1-p)$$

Igualando, obtenemos $p = 1/2$. (3 puntos)

La condición necesaria y suficiente para que la estrategia mixta p sea evolutivamente estable en mixtas, está dada por:

$$U(p,q) > U(q,q)$$

(3 puntos)

Calculamos:

$$U(p,q) = 1/2q + 1/2(1-q) = 1/2$$

$$U(q,q) = q^2 + (1-q)^2 = 1 - 2q - 2q^2$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} > 2 - 2q^2 - 2q$$

Como el valor mínimo del lado derecho de la expresión anterior, para $q \in [0,1]$ es $\frac{1}{2}$, esta desigualdad estricta nunca se cumple y no existen estrategias evolutivamente estables en estrategias mixtas. (4 puntos)

3. (30pts) Dos firmas deciden simultánemente precios $p_i \in \{0, 1, 2, \dots\}$. La demanda total es igual a 1, siempre y cuando el precio sea menor o igual a $v > 0$; si el precio excede v entonces la demanda es 0. Suponemos que v es natural. Si la firma i fija el menor precio satisface toda la demanda a un precio p_i; en caso de empate ambas firmas se reparten la demanda. Los costos marginales de la firma i son constantes e iguales a c_i. Suponemos que $v \geq c_i + 2$ para todo i. La función objetivo de la firma i son sus utilidades. Note que los precios se deben escoger en unidades discretas (por ejemplo, en pesos).

   a. (5pts) Suponiendo que $c_1 = c_2$ es un natural, encuentre todos los EN simétricos del juego.

   Solución:

   El juego se puede caracterizar como $G = \langle I, (S_i)_{i\in I}, (u_i)_{i\in I}\rangle$, donde $I = \{1,2\}$ son los jugadores, $p_i \in S_i = \mathbb{N}$ son las estrategias, y las funciones de utilidad están dadas por:

$$u_i(p_i,p_j) = \Pi(p_i,p_j) = \begin{cases} \frac{p_i - c_i}{2} & \text{if } p_i = p_j \\ p_i - c_i & p_i < p_j \wedge p_i \leq v \\ 0 & p_i > p_j \vee p_i > v \end{cases}$$

   Busquemos los equilibrios simétricos; es decir, aquellos de la forma (p,p). Observemos que:

   - Nunca será un desvío estrictamente mejor subir el precio ya que si $p^d > p$:

$$u_i(p^d,p) = 0 \leq \frac{p - c_i}{2} = u_i(p,p)$$

- El mejor de los desvíos es moverse sólo una unidad monetaria hacia abajo, ya que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$u_i(p-1,p) = p-1-c_i \geq p-n-c_i = u_i(p-n,p)$$

- De haber un equilibrio simétrico, será $p \in \{c_i, c_i+1, ..., v\}$ ya que si se escoge un precio menor a c_i las firmas incurrirán en pérdidas, y si se se toma un precio mayor a v la demanda no estará siendo satisfecha.

Tomando en cuenta lo dicho anteriormente, la condición necesaria y suficiente para que un perfil (p,p), con $p \in \{c_i, c_i+1, ..., v\}$, sea EN es que:

$$u_i(p,p) \geq u_i(p-1,p) \iff \frac{p-c_i}{2} \geq p-1-c_i \iff c_i+2 \geq p$$

Lo que se traduce en $p \in \{c_i, c_i+1, c_i+2\}$. Por lo tanto los EN simétricos son: $\{(c_i,c_i),(c_i+1,c_i+1),(c_i+2,c_i+2)\}$.

b. (5pts) Son los EN encontrados en a. óptimos desde la perspectiva de las firmas. Explique cuidadosamente.

Solución:

Desde la perspectiva de la firma, lo óptimo sería vender al mayor precio posible que acapare toda la demanda: $p_i = v$. En general, los equilibrios encontrados en la parte (a) no son óptimos, ya que $p < v$. La única excepción sería que $v = c_i + 2$, en ese caso el perfil (c_i+2, c_i+2) es un EN óptimo para las firmas.

c. (10pts) Suponga ahora que $c_2 \geq c_1 + 1$ y ambos son naturales. Encuentre un EN del juego donde la firma 2 no produce y fija un precio mayor o igual a c_2. Existe un EN donde la firma 2 fija un precio menor a c_2?

Solución:

Postulemos el perfil (c_2, c_2+1) y demostremos que es un EN.

- Si la firma 2 sube los precios, seguirá sin producir, por lo que su utilidad se mantendrá en cero. No será un desvío rentable. Por otro lado, si se desvía a un precio menor o igual a c_2 producirá, pero obtendrá utilidades nulas o negativas. En conclusión, la firma 2 no tiene desvíos.
- A la firma 1 no le conviene bajar los precios, ya que seguirá acaparando toda la demanda, pero a un precio menor que le reportaría menos utilidades. Tampoco le conviene desviarse a un precio mayor que c_2+1 ya que no vendería.
- El único caso que no es directo de analizar es si a la firma 1 le convendría subir una unidad el precio:

$$u_1(c_2+1, c_2+1) > u_1(c_2, c_2+1) \iff \frac{c_2+1-c_1}{2} > c_2 - c_1 \iff 1 + c_1 > c_2$$

  Lo cual contradice la hipótesis del enunciado: $c_2 \geq c_1 + 1$.

En conclusión, ninguna firma tiene incentivos al desvío, por lo tanto el perfil propuesto corresponde a un EN. (6pts)

Para la segunda parte, postulamos a (c_2-1, c_2) como un EN del juego. Claramente, la firma 2 no tiene incentivos a desviarse pues desviandose obtiene a lo más utilidades nulas. La firma 1 obtiene (c_2-1-c_1) jugador c_2-1 mientras que si se desvia, lo mejor que puede hacer es obtener un precio c_2 y compartir el mercado obteniendo $(c_2-c_1)/2$ Bajo el supuesto $c_2 \geq c_1+2$, hemos encontrado un EN en el cual la firma 2 fija un precio menor a su costo por unidad c_2. (4pts)

d. (10pts) Encuentre una combinación de precios (p_1, p_2) que deja a ambas firmas mejor y a una estrictamente mejor que el EN encontrado en la primera parte de c.

Solución:

El perfil $(v, v+1)$ deja a la firma 2 igual porque sigue sin vender, y a la firma 1 la deja estrictamente mejor, ya que:

$$u_1(v, v+1) = v - c_1 > c_2 - c_1 = u_1(c_2, c_2+1)$$

Nota 1: En general, todos los pares (c_2+n, c_2+n+k) tales que $n, k \geq 1$ y $c_2+n \leq v$ cumplen la propiedad pedida.

Nota 2: Podrían existir otros, pero sería necesario exigirle condiciones a los parámetros.