IN3202 Microeconomía
Primavera 2012

Profesor: Juan Escobar
Auxiliares: Felipe Carrera y Carlos Lizama

Control 2
Tiempo: 90 minutos

1. (30pts) Use sus conocimientos de teoría de juegos y no más de 6 renglones para responder las siguientes preguntas. Su respuesta no será evaluada si excede el límite o está escrita con letra ilegible.

   a. (10pts) La proliferación de armas de destrucción masiva ha sido una preocupación constante de lideres mundiales y organizaciones internacionales. Explique por qué la prohibición de las armas de destrucción masiva puede hacer del mundo un lugar más inestable e inseguro.
   Solución

   Si se prohibieran las armas los países podrían "desviarse" de estos acuerdos, y construirlas o tener planes para construirlas en poco tiempo. Además, dado que no se conoce el real potencial bélico de los otros países (cada país oculta su real armamento), se tiende a invertir aun más en armas (para no estar en desventaja con respecto al resto), lo que en caso de guerra se llega a una situación mucho más desastrosa. Los países no conocen el "tipo" de sus rivales, por lo que deciden reforzarse. Esto se contrasta con el caso donde los países conocen quienes tienen y desarrollan este tipo de armamento, además de cuánto armamento tienen. Esta información se traduce en una producción controlada y conocida de estas armas, en cuyo caso hay mayor estabilidad.

   b. (10pts) La aptitud de un individuo está determinada tanto por sus características como por el ambiente donde se desenvuelve. Consideremos una especie con matrices de aptitud determinadas como en el dilema del prisionero. Discuta: "Ya que los individuos de la especie no escogen sus caractersticas (es decir, las características no son una decisión estrátegica), es posible que los individuos de la especie tengan características cooperativas en un equilibrio evolutivamente estable."
   Solución

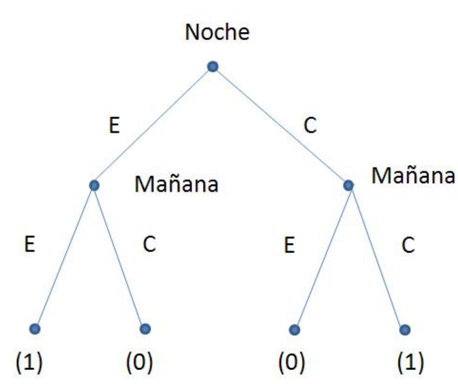
   La afirmación es claramente falsa. Consideremos un Dilema del Prisionero genérico con los pagos de la figura (donde $1 + g > m$).

	C	D
C	m, m	$-l, 1+g$
D	$1+g, -l$	$0, 0$

   Es claro que en una población en la cual todos los individuos comparten la característica C (colaborativa) de desarrollar una fracción pequeña de la población la característica D (defectar, no colaborativa), la utilidad de los individuos con mutación va a ser estrctamente mayor que la utilidad de los individuos con la característica original, por lo que la característica C no puede ser evolutivamente estable (10 puntos).

   c. (10pts) Cada noche, Pedro deja su billetera en algún lugar de su dormitorio. Por concretitud, suponga que tiene dos alternativas: escritorio (E) y cómoda (C). Al despertar, debe decidir donde ir a buscar su billetera. Si la encuentra, su pago es 1; si no la encuentra su pago es 0. Considere dos situaciones. En la primera (juego I), al despertar Pedro recuerda dónde dejo la billetera la noche anterior. En la segunda (juego II), Pedro no lo recuerda. Modele cada una de las dos situaciones como un juego en forma extensiva (basta un dibujo con el árbol, los conjuntos de información, y los pagos) y encuentre todos los EPS.
   Solución

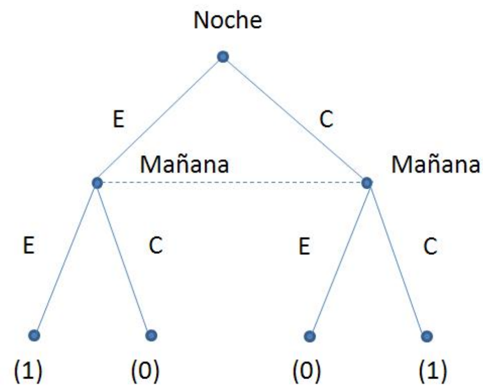
   La primera situación se puede representar de forma extensiva de acuerdo a la siguiente figura.



De aquí, es claro que este juego dinámico posee dos EPS .

$$EPS = \{(E,(E,C))\,;(C,(E,C))\}\,(5puntos)$$

En la segunda situación (cuando no recuerda donde puso la billetera la noche anterior), la representación del juego está dada por la siguiente figura.



El juego en este caso es equivalente a un juego estático (se considera buena la respuesta si fue representado en su forma normal), el que posee dos EN en estrategias puras. Debido a que este es el único subjuego del juego en este caso, dichos EN constituyen sus EPS.

$$N = \{(C,C),(E,E)\}\,(5puntos)$$

2. (30pts) Dos hermanos, Pedro y Juan, negocian la repartición de una herencia de tamaño 1. La negociación dura a lo más 2 rondas. En la primera, Pedro hace una oferta y luego Juan decide si aceptar o no aceptar la oferta. Si la acepta, el juego se acaba y los pagos de cada hermano corresponden a la fracción de la herencia recibida. Si Juan rechaza la oferta, se procede a la segunda ronda de negociación. Al principio de esta segunda ronda, se decide aleatoriamente quien hace la oferta y quien debe decidir si aceptarla o no. Más concretamente, con probabilidad $\pi > 0$, Pedro hace una oferta y luego Juan decide si aceptar o no; mientras que con probabilidad $(1-\pi)$ es Juan quien hace la oferta y Pedro decide si la acepta o no (De este modo, si $\pi = 0$ se obtiene el modelo de negociación de dos periodos con oferentes alternantes). Si no hay acuerdo en $t = 2$, los pagos son 0. Suponemos que $\pi \in]0,1[$ y que los pagos se descuentan a tasa $\delta < 1$.

   a. (3pts) Describa el conjunto de estrategias para cada jugador.
   Solución

   Una estrategia para un jugador en este contexto corresponde a una función que le dice a los jugadores que acción a_i^k tomar en cada etapa k del juego, para cada posible historia del juego hasta dicha etapa, h^k (incluyendo lo que define la naturaleza, en cuando a quién le toca ofertar en la segunda etapa del juego).
   Podemos definir el conjunto de estrategias de Pedro de la siguiente forma:

$$\sigma_{Pedro} : \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$$

   Donde, $\sigma_1 \in [0,1]$ corresponde a la oferta que Pedro efectúa en la etapa 1; $\sigma_2(u)\colon [0,1] \to [0,1]$, es la oferta que Pedro efectúa en la segunda etapa (la que es función de la oferta u que el mismo hizo en la primera etapa). Por último, $\sigma_3(u,v)\colon [0,1]\times[0,1] \to \{aceptar, rechazar\}$, donde $\sigma_3(u,v)$ indica si Pedro acepta o rechaza la oferta v que Juan le hace, dada la oferta u que Pedro le hizo a Juan en la primera ronda.
   De manera análoga, el conjunto de estrategias de Juan está dado por:

$$\sigma_{Juan} : \{\sigma_4, \sigma_5, \sigma_6\}$$

   Donde, $\sigma_4(u)\colon [0,1] \to \{aceptar, rechazar\}$, indica si Juan acepta o rechaza la oferta u de Pedro en la primera etapa; $\sigma_5(u,z)\colon [0,1]\times[0,1] \to \{aceptar, rechazar\}$ dice si Juan acepta o rechaza la oferta z de Pedro en la segunda etapa, dada la oferta u que Pedro hizo en la primera etapa. Por último, $\sigma_6(u)\colon [0,1] \to [0,1]$ corresponde a la oferta que Juan le hace a Pedro en la segunda etapa, en función de la oferta u que Pedro le hizo a Juan en la primera etapa. (3 puntos)

   b. (10pts) Encuentre un EPS del juego de negociación. Cuantas rondas dura la negociación? Explique.
   Solución

   Asumimos que en caso de indiferencia los jugadores aceptan la oferta del rival. Vamos a resolver el juego por inducción reversa, partiendo desde la segunda etapa.

- En la segunda etapa, con probabilidad π le toca ofertar a Pedro. En este caso Pedro le ofrece $z = 0$ a Juan, el que acepta (ya que recibiría cero en todo caso), por lo tanto, en este caso los pagos que obtienen los jugadores son $(\delta, 0)$.
- Con probabilidad $(1 - \pi)$ le toca ofertar a Juan. En este caso, Juan es el que ofrece $v = 0$ a Pedro el que acepta (ya que recibiría cero en todo caso), por lo tanto, en este caso los pagos que obtienen los jugadores son $(0, \delta)$.

Por lo tanto, los pagos esperados en el caso de alcanzar la segunda etapa el juego son $(\delta\pi, (1 - \pi)\delta)$. (3 puntos)

Debido a que en la primera etapa del juego el que oferta es Pedro, él puede anticipar el pago esperado que obtendría Juan en la segunda etapa, así que le hace oferta de manera de dejarlo indiferente (ofreciéndole $u = (1 - \pi)\delta)$) y Juan acepta. De esta forma, el juego se resuelve en una etapa, con pagos dados por $V = (1 - (1 - \pi)\delta), (1 - \pi)\delta)$ y el EPS del juego está dado por el perfil de estrategias descrito a continuación. (7 puntos)

$$\begin{aligned} EPS = \{ & (\sigma_1 = (1 - \pi)\delta = u^\star, \sigma_2(u) = 0 = z^\star, \sigma_3(u, v) = \{aceptar\ \forall v\}) \, ; \\ & (\sigma_4(u) = \{aceptar \text{ si } \ u \geq (1 - \pi)\delta\} \, , \sigma_5(u, z) = \{aceptar\ \forall z\} \, , \sigma_6(u) = 0 = v^\star)\} \end{aligned}$$

Notar que en equilibrio los jugadores en el segundo periodo no condicionan en la oferta de Pedro del primer periodo u. Es decir, $\sigma_2, \sigma_3, \sigma_5$ y σ_6 no dependen de u.

c. (2pts) Explique como cambian los pagos de equilibrio cuando aumente π. Discuta.
Solución

Cuando aumenta π, la probabilidad de que le toque ofertar a Juan en la segunda etapa disminuye, por lo que también va disminuyendo lo que le tiene que ofrecer Pedro en la primera etapa de manera de que Juan acepte inmediatamente la partición. En particular, si $\pi = 1$, Pedro puede ofrecerle a Juan $x_1 = 0$ en la primera etapa y Juan va a tener que aceptar la oferta, quedándose Pedro con toda la herencia. (2 puntos)

En lo que sigue del problema, suponga que los hermanos no sólo tienen el conflicto de repartirse la herencia, además tienen distintas visiones del mundo. En particular, los hermanos no están de acuerdo sobre el valor de π. Mientras Pedro cree que π es alto, Juan cree que π es bajo. Sea π^i la probabilidad que el jugador i otorga al evento que Pedro sea quien ofrece en el periodo 2. Suponemos que $\pi^{Pedro} > \pi^{Juan}$. Los hermanos conocen sus diferencias, es decir, los valores π^i son conocimiento común.

d. (3pts) Describa el conjunto de estrategias de cada jugador.
Solución

Las estrategias de los jugadores no cambian en este caso respecto de la primera parte del problema. Por lo tanto, vamos a tener para Pedro:

$$\sigma_{Pedro} : \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$$

Mientras que el conjunto de estrategias para Juan, va a estar dado por:

$$\sigma_{Juan} : \{\sigma_4, \sigma_5, \sigma_6\}$$

Donde las funciones $\sigma_n(\forall n \in \{1, 6\})$ se encuentran definidas de igual manera que en la parte a) del problema.(3 puntos)

e. (12pts) Encuentre un EPS del juego. Es posible que en equilibrio la duración de la negociación sea distinta a la encontrado en b? Explique.

El juego se puede resolver de forma análoga al caso anterior por inducción reversa.

- En la segunda etapa, de acuerdo a Pedro con probabilidad π^{Pedro} le toca ofertar a él. En este caso Pedro le ofrece $z = 0$ a Juan, el que acepta (ya que recibiría cero en todo caso), por lo tanto, en este caso los pagos que obtienen los jugadores son $(\delta, 0)$.
- De acuerdo a las creencias de Juan, con probabilidad $(1 - \pi^{Juan})$ le toca ofertar a él. En este caso, Juan es el que ofrece $v = 0$ a Pedro el que acepta (ya que recibiría cero en todo caso), por lo tanto, en este caso los pagos que obtienen los jugadores son $(0, \delta)$.

Por lo tanto, los pagos esperados en el caso de alcanzar la segunda etapa para los jugadores son $(\pi^{Pedro}\delta, (1 - \pi^{Juan})\delta)$.

Mirando la primera etapa del juego, hay que notar que la mejor respuesta para Juan es aceptar cualquier oferta de Pedro que cumpla $u \geq (1 - \pi^{Juan})\delta$. De acuerdo a esto, Pedro tiene dos opciones: puede hacerle una oferta que Juan quiera aceptar, de manera de que la negociación dure una sóla etapa, o puede dejar que el juego llegue a la segunda etapa, esperando recibir $\pi^{Pedro}\delta$.

Siguiendo con el análisis, para que Pedro prefiera la primera ópcion a la segunda, se tiene que cumplir que su utilidad esperada dado que efectúa la oferta a Juan es al menos tan buena como su utilidad esperada de dejar que el juego llegue a la segunda etapa, es decir:

$$1 - (1 - \pi^{Juan}) \geq \delta \pi^{Pedro}$$

De esta condición, y usando que $\pi^{Pedro} > \pi^{Juan}$, obtenemos la diferencia máxima que puede existir entre π^{Pedro} y π^{Juan} de manera que sea factible un acuerdo en la primera etapa. (4 puntos)

$$\pi^{Pedro} - \pi^{Juan} \leq \frac{(1-\delta)}{\delta} \tag{0.1}$$

La intuición detrás de esta condición, es que para que sea posible que haya un acuerdo en la primera etapa, la suma de lo que esperan obtener ambos jugadores en la segunda etapa tiene que ser menor a la herencia que ambos jugadores están repartiendo.

Para definir el EPS de este juego, partimos analizando el caso en el que la condición (0.1) se cumple (caso 1).

$$EPS_1 = \{(\sigma_1 = (1-\pi^{Juan})\delta, \sigma_2(u\star) = 0, \sigma_3(u\star, v\star) = \{aceptar\}); (\sigma_4(u\star) = \{aceptar\}, \sigma_5(u\star, z\star) = \{aceptar\}, \sigma_6(u\star) = 0)$$

Por lo tanto, los pagos en equilibrio en este caso serán $V_1 = (1-(1-\pi^{Juan})\delta, (1-\pi^{Juan})\delta)$ y la negociación se resuelve en una etapa. (4 puntos)

En el caso (2), en tanto, (cuando no se cumple la condición 0.1), el EPS del juego queda definido por:

$$EPS_2 = \{(\sigma_1 = 0, \sigma_2(u\star) = 0, \sigma_3(u\star, v\star) = \{aceptar\}); (\sigma_4(u\star) = \{rechazar\}, \sigma_5(u\star, z\star) = \{aceptar\}, \sigma_6(u\star) = 0)\}$$

Es decir, en este caso Pedro ofrece en la primera etapa la cantidad $u\star < (1-\pi^{Juan})\delta$ tal que maximiza su utilidad en el caso que Juan se desvie y acepte su oferta en la primera etapa (o sea, ofrece $u\star = 0$).

En este caso, la negociación dura 2 etapas y los pagos están dados por $V_2 = (\pi\delta, (1-\pi)\delta)$, donde π corresponde al verdadero valor del parámetro π. (4 puntos)

3. (30pts) El dueño de una antigua empresa, cansado de trabajar tan duro por tantos años, ha decidido vender su negocio. Un potencial comprador está interesado, pero desconoce los flujos de ingresos que la empresa puede generar. Desde su perspectiva, el flujo θ se distribuye uniformemente en el conjunto $[1,3]$. El dueño conoce el flujo θ que el comprador podria obtener. Pero el dueño está cansado de trabajar, por lo que los flujos que el obtiene si no vende la empresa son $\theta - 1$.

   El protocolo de negociacion es el siguiente. Las partes simultáneamente anuncias precios p^d y p^c en $\mathbb{R}_+$, donde p^d (resp. p^c) es el precio que anuncia el dueño (resp. comprador). Si $p^d > p^c$, entonces no hay transacción y los pagos son $u^d = \theta - 1$ y $u^c = 0$. Si $p^d \leq p^c$, entonces se transa a precio p^c y las utilidades son $u^d = p^c$ y $u^c = \theta - p^c$.

   a. (5pts) Modele la situación como un juego Bayesiano. Describa el espacio de estrategias de cada jugador.

   Sol: El juego queda determinado por:

   (i) Los jugadores: El dueño y el comprador.

   (ii) El conjunto de "tipos" del dueño, $\theta \in [1,3]$ que equivale a los flujos que genera la empresa y que son información privada del dueño.

   (iii) La distribución de probabilidad sobre los tipo, $\theta \sim U[1,3]$

   (iv) El conjunto de acciones de los jugadores. Para el comprador el set de acciones correponde a $p^c \in \mathbb{R}^+$ y para el dueño $p^d \in \mathbb{R}^+$.

   (v) Las funciones de utilidad, o pagos de los jugadores son:

$$u^d(p^d, p^c) = \begin{cases} \theta - 1 & \text{si } p^d > p^c \\ p^c & \text{si } p^d \leq p^c \end{cases}$$

$$u^c(p^c, p^d) = \begin{cases} 0 & \text{si } p^d > p^c \\ \theta - p^c & \text{si } p^d \leq p^c \end{cases}$$

   Para el comprador una estrategia está definida simplemente por el precio que ofrece $p^c \in \mathbb{R}^+$. Para el dueño una estrategia queda determinada por una función, que para cada valor posible de θ le asigna un precio, ie., una estrategia del dueño queda determinada por:

$$\begin{aligned} p^d : [1,3] &\to \mathbb{R} \\ \theta &\to p^d(\theta) \end{aligned}$$

b. (5pts) Explique por qué es socialmente deseable que la transacción se produzca para todo θ.

Sol: Si no se lleva a cado la transacción, la utilidad social queda determinada por: $U^1 = u^d + u^c = \theta - 1$.

Por otro lado, si la empresa es vendida entonces la utilidad social es: $U^2 = u^d + u^c = p^c + \theta - p^c = \theta$.

Por lo tanto, claramente $\forall\theta$ es preferible que se lleve a cabo la transacción.

c. (5pts) En lo que sigue nos interesa encontrar un EB del juego. Muestre que $p^d(\theta) = \theta - 1$ es óptima para el dueño.

Sol: En equilibrio, el dueño toma la oferta del comprador como un dato. Notar que el precio que ofrece el dueño sólo decide si la transacción se efectúa y no cuánto es la utilidad que le queda (su utilidad depende del precio del comprador). Por lo tanto, el dueño en equilibrio ofrece $p^d = \theta - 1$, pues con este precio maximiza la posibilidad de venta en caso de que le convenga venderlo (Notar que para todo $p^c \geq \theta - 1$ el dueño esta mejor si vende). Este caso es análogo a la estrategia que sigue un jugador en una subasta de segundo precio.

d. (10pts) Encuentre un EB del juego. Discuta la eficiencia del equilibrio encontrado.

Sol: La transacción se lleva a cabo si $p^d = \theta - 1 \leq p^c \Leftrightarrow \theta \leq p^c + 1$, en cuyo caso el comprador se lleva $\theta - p^c$. Por lo tanto, el comprador resuelve:

$$\max_{p^c} \int_1^{p^c+1} (\theta - p^c)\frac{1}{2}d\theta$$

$$\max_{p^c} -\frac{p^2}{2} + p$$

De las condiciones de primer orden de este problema se concluye que $p^c = 1$

Este equilibrio puede ser ineficiente. En efecto, para $\theta \in]2, 3]$ la transacción no se efectúa pese a que es socialmente deseable que ocurra.

e. (5pts) Explique cómo se conecta la maldición del ganador (i.e., que puede ser malo transar o ganar) con el equilibrio encontrado en d.

Sol: En el equilibrio encontrado en la parte anterior la transacción se efectúa cuando los flujos de los proyectos no son lo suficientemente buenos. En caso de haber flujos muy buenos la empresa no es vendida. Por lo tanto en este caso el comprador, de ser exitosa la oferta, debiera saber que (dado que la pudo comprar) la realización de los flujos de la empresa se encuentra en la parte baja de su distribución y por lo tanto, esta no es tan rentable.