IN3202 Microeconomía
Primavera 2011

Profesor: J. Escobar
Auxiliares: O. Aravena y C. Lizama

Control 1
Tiempo: 75 minutos

1. (15pts) Use sus conocimientos de teoría de juegos y no más de 3 lineas por pregunta.

   a. (10pts) Discuta: "En un juego en formal normal con solución de eliminación iterada de estrategias dominadas, un jugador racional siempre debiese jugar la acción que sobrevive el proceso de eliminación."
   Solución: Un jugador racional puede no jugar la solución de eliminación iterada de estrategias estrictamente dominadas (EIEED) si es que considera que sus rivales no son racionales. La solución de EIEED será el resultado del juego sólo cuando hay conocimiento común de la racionalidad: cada jugador sabe que sus rivales son racionales, y que los rivales saben que el sabe que ellos son racionales, etcetera.

   b. (5pts) Discuta:"Puedes tapar un penal por instinto o estudiando al rival, pero algo dentro tuyo es quien gobierna donde tirarte" (la frase es de Sergio Goycochea, arquero de la selección argentina durante el mundial de Italia 1990).
   Solución: En la realidad, los jugadores no lanzan monedas (o realizan loterías) previo a sus movidas. Las fuentes de aleatoriedad en sus jugadas tienen que ver con el estado de ánimo o factores externos. La frase de Goycochea sugiere que es el estado de ánimo la fuente de aleatoriedad de sus movidas.

2. (30pts) Cada sábado, Pedro, Juan y Diego deciden simultáneamente si ir al club a jugar tenis (C) o quedarse durmiendo (D). Quedarse durmiendo da un pago seguro e igual a 0. Ir al club de tenis tiene un costo igual a $c > 0$. Los beneficios de jugar un partido de tenis son iguales a 1. Si un solo jugador va al club, entonces no puede jugar y su pago es igual a $-c$. Si sólo dos jugadores van al club de tenis, entonces cada uno tendrá un pago igual a $1 - c$. Si los tres jugadores van al club, entonces se decide aleatoriamente quienes jugarán de modo que el pago de cada uno de los tres jugadores es $\frac{2}{3} - c$.

   a. (10pts) Muestre que si $c > 1$, entonces cada jugador tiene una estrategía estrictamente dominada.
   Solución: El juego puede verse de la siguiente manera:

	C	D
C	$\frac{2}{3} - c, \frac{2}{3} - c, \frac{2}{3} - c$	$1 - c, 0, 1 - c$
D	$0, 1 - c, 1 - c$	$0, 0, -c$

C

	C	D
C	$1 - c, 1 - c, 0$	$-c, 0, 0$
D	$0, -c, 0$	$0, 0, 0$

D

Veamos para el jugador 1 (letras negras): Para cualquier combinación de estrategias que juegue el resto de los jugadores $(\{C, C\}, \{D, D\}, \{D, C\}, \{C, D\})$ **SIEMPRE** prefiere la estrategia **D**. Por lo tanto, dormir es una estrategia dominante. Dado que el juego es simétrico, se tiene lo mismo para el resto de los jugadores.

b. (10pts) Suponga ahora que $c \in]2/3, 1[$. Muestre que en cualquier equilibrio de Nash, el número de jugadores que va al club es igual a 0 ó 2. Encuentre todos los equilibrios de Nash del juego.

	C	D
C	$\frac{2}{3}-c, \frac{2}{3}-c, \frac{2}{3}-c$	$\underline{1-c}, \underline{0}, \underline{1-c}$
D	$\underline{0}, \underline{1-c}, \underline{1-c}$	$0, 0, -c$

C

	C	D
C	$\underline{1-c}, \underline{1-c}, \underline{0}$	$-c, 0, 0$
D	$0, -c, 0$	$\underline{0}, \underline{0}, \underline{0}$

D

Por lo que los equilibrios son: $EN = \{(D,D,D), (C,C,D), (C,D,C), (D,C,C)\}$

Otra manera que pueden responder es la siguiente: Es claro que (D,D,D) es siempre EN. Supongamos ahora que s^* es EN tal que algun i va al club. Debe existir j distinto de i que tambien va al club pues de lo contrario i prefiriria no ir al club. Mas aun, debe existir un nico j diferente de i que va al club, pues si los tres jugadores fueran al club el pago de i seria $2/3 - c < 0$, y luego i preferiria jugar D. Se sigue que s^* debe ser tal que $s_i = s_j = C$ para $j \neq i$ y $s_k = D$. Se sigue que en cualquier equilibrio de Nash, nadie va al club, o solo 2 jugadores van al club.
Finalmente, es facil ver que cualquier perfil en el que nadie va al club o exactamente 2 jugadores van al club es tambien EN. Luego el conjunto de EN es:
$EN = \{(D,D,D), (C,C,D), (C,D,C), (D,C,C)\}$

c. (10pts) Suponga que $c = 3/4$. Encuentre un equilibrio de Nash en estrategias mixtas simétrico.

Solución: Consideremos el siguiente perfil de estrategias para los jugadores:

Jugador 1 juega $\sigma_1 = (\alpha, 1-\alpha)$
Jugador 2 juega $\sigma_2 = (\beta, 1-\beta)$
Jugador 3 juega $\sigma_3 = (\gamma, 1-\gamma)$

Las siguientes son las utilidades de los jugadores:
Jugador 1:
$E\left[u_1(C)/\sigma_2\sigma_3\right] = (\frac{2}{3} - \frac{3}{4})\gamma\beta + (1 - \frac{3}{4})\gamma(1-\beta) + (1 - \frac{3}{4})\beta(1-\gamma) - \frac{3}{4}(1-\beta)(1-\gamma)$
$E\left[u_1(D)/\sigma_2\sigma_3\right] = 0$

Jugador 2:
$E\left[u_2(C)/\sigma_1\sigma_3\right] = (\frac{2}{3} - \frac{3}{4})\gamma\alpha + (1 - \frac{3}{4})\gamma(1-\alpha) + (1 - \frac{3}{4})\alpha(1-\gamma) - \frac{3}{4}(1-\alpha)(1-\gamma)$
$E\left[u_2(D)/\sigma_1\sigma_3\right] = 0$

Jugador 3:
$E\left[u_3(C)/\sigma_1\sigma_2\right] = (\frac{2}{3} - \frac{3}{4})\beta\alpha + (1 - \frac{3}{4})\beta(1-\alpha) + (1 - \frac{3}{4})\alpha(1-\beta) - \frac{3}{4}(1-\alpha)(1-\beta)$
$E\left[u_3(D)/\sigma_1\sigma_2\right] = 0$

Sabemos que para que los jugadores jueguen una estrategia mixta entre C y D, ambas acciones deben reportarles la misma utilidad. Por otro lado, dado que el equilibrio es simétrico tenemos que: $\alpha = \beta = \gamma$

Resumiendo, tenemos:

$$
\begin{gathered}
(\frac{2}{3} - \frac{3}{4})\gamma\beta + (1 - \frac{3}{4})\gamma(1-\beta) + (1 - \frac{3}{4})\beta(1-\gamma) - \frac{3}{4}(1-\beta)(1-\gamma) = 0 \\
(\frac{2}{3} - \frac{3}{4})\gamma\alpha + (1 - \frac{3}{4})\gamma(1-\alpha) + (1 - \frac{3}{4})\alpha(1-\gamma) - \frac{3}{4}(1-\alpha)(1-\gamma) = 0 \\
(\frac{2}{3} - \frac{3}{4})\beta\alpha + (1 - \frac{3}{4})\beta(1-\alpha) + (1 - \frac{3}{4})\alpha(1-\beta) - \frac{3}{4}(1-\alpha)(1-\beta) = 0 \\
\alpha = \beta = \gamma
\end{gathered}
$$

Cuya solución es $\alpha = \beta = \gamma = \frac{3}{4}$

3. (30pts) Dos estudiantes deciden simultáneamente cuánto estudiar $e_i \in [0,1]$. Las funciones de utilidad de los estudiantes son

$$u_1(e) = \ln(1 + 3e_1 - e_2) - e_1, \;\; u_2(e) = \ln(1 + 3e_2 - e_1) - e_2.$$

El término negativo de la utilidad de 1 refleja el costo de oportunidad del tiempo dedicado al estudio, mientras que el término positivo refleja los beneficios de estudiar sobre la nota considerando que mientras más estudie el otro estudiante menor será la nota propia (asumiendo que la escala de notas se ajusta).

a. (10pts) Encuentre la función de mejor respuesta del jugador 1. Encuentre todos los equilibrios de Nash del juego.

Solución: El jugador 1 resuelve:

$$\max_{e_1} u_1(e) = \max_{e_1} \ln(1 + 3e_1 - e_2) - e_1$$

Las condiciones de primer orden de este problema son:

$$\frac{1}{1 + 3e_1 - e_2} \cdot 3 - 1 = 0$$

Por lo tanto, la función de mejor respuesta del jugador 1 es:

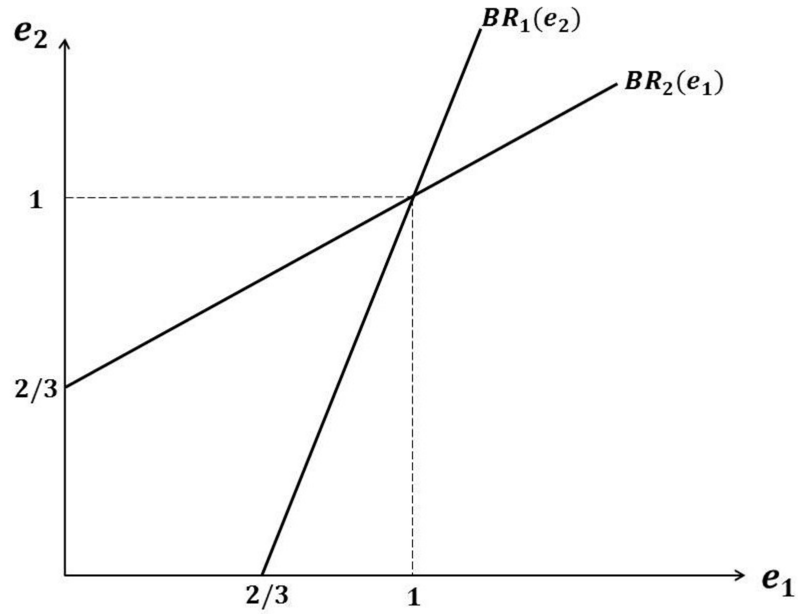
$$e_1 = BR_1(e_2) = \frac{2 + e_2}{3}$$

Análogamente, la función de mejor respuesta del jugador 2 es

$$e_2 = BR_2(e_1) = \frac{2 + e_1}{3}$$

De las funciones de mejor respuesta de ambos jugadores (o imponiendo simetría en el juego) se concluye que el Equilibrio de Nash del juego de $e = (1,1)$.

Gráficamente:



b. (10pts) Sea $e = (1/2, 1/2)$. Muestre que cada uno de los jugadores prefiere el perfil e por sobre el perfil encontrado en a. Explique por qué los jugadores están mejor esforzandose menos que en el equilibrio de Nash. Discuta además por qué el perfil $(1/2, 1/2)$ no es sostenible en un equilibrio de Nash.

Solución: Veamos que efectivamente cada jugador prefiere el perfil $e = (1/2, 1/2)$ en lugar del perfil $e' = (1, 1)$. En efecto:

$$\begin{aligned} u(e) &= \ln(1 + 3/2 - 1/2) - 1/2 = \ln(2) - 1/2 \\ u(e') &= \ln(1 + 3 - 1) - 1 = \ln(3) - 1 \end{aligned}$$

Luego, para que el jugador 1 prefiera el perfil e por sobre el e' se debe cumplir que:

$$\begin{aligned} u(e) &> u(e') \\ \ln(2) - 1/2 &> \ln(3) - 1 \\ 1/2 &> \ln(3/2) \\ \sqrt{e} &> 3/2 \\ 2.718 = e &> 9/4 = 2.25 \end{aligned}$$

Por lo tanto ambos jugadores prefieren el perfil e sobre el e'.

Cuando un jugador aumenta su nivel de esfuerzo aumenta la utilidad marginal de esforzarse del otro jugador (existe una externalidad) y por lo tanto el otro jugador responde esforzándose más. En otras palabras, cuando un jugador elige su nivel de esfuerzo no considera el efecto que tendrá sobre el esfuerzo que ejercerá el otro jugador. Esto produce que en equilibrio haya un exceso de esfuerzo.

El perfil $e = (1/2, 1/2)$ no es sostenible en equilibrio porque el beneficio marginal de aumentar el esfuerzo ($\frac{3}{(1+3e_1-e_2)} = \frac{3}{2}$) es mayor que su costo marginal (-1) por lo que ambos jugadores tienen incentivos a desviarse aumentándo su nivel de esfuerzo.

c. (10pts) Suponga ahora que el costo de oportunidad del tiempo del jugador 1 es más alto, de modo que su función de utilidad es

$$v_1(e) = \ln(1 + 3e_1 - e_2) - (1 + \alpha)e_1$$

donde $\alpha > 0$. La función de utilidad del jugador 2 no cambia. Grafique las nuevas funciones de mejor respuesta y explique, sin hacer cálculos, cómo se compara el nuevo equilibrio de Nash con la solución encontrada en a. Discuta.

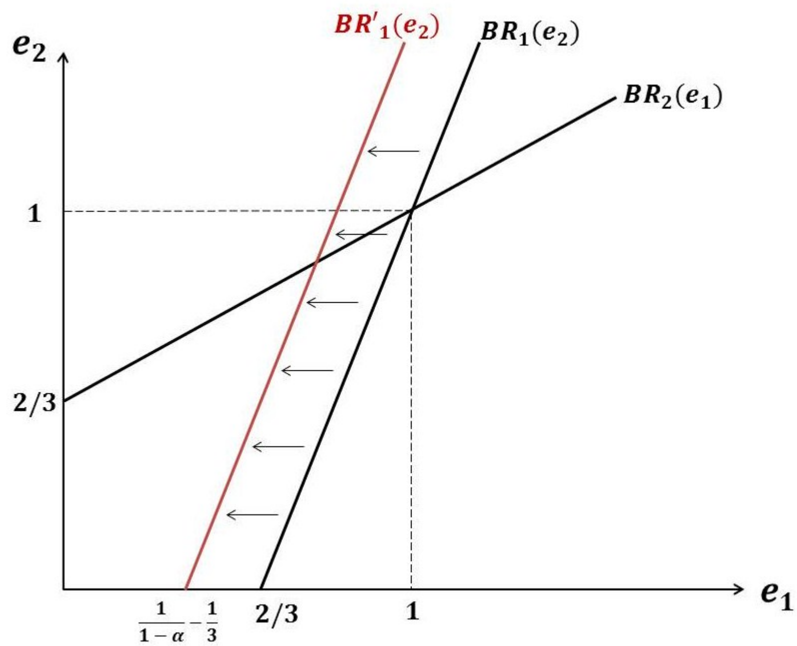
Solución: El problema que resuelve el jugador 1 es:

$$\max_{e_1} u_1(e) = \max_{e_1} \ln(1 + 3e_1 - e_2) - (1 + \alpha)e_1$$

De las condiciones de primero orden de este problema se obtiene que:

$$e_1 = BR_1(e_2) = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{1+\alpha} + e_2 - 1\right)$$

Las nuevas funciones de mejor respuesta quedan:



Se puede ver que la función de mejor respuesta del jugador 1 se desplaza hacia la izquierda debido al aumento del costo de esforzarse.

Dado que para el jugador 1 es más costos esforzarse entonces ejercerá un menor esfuerzo. El jugador 2 también se esforzará menos pues sabe que el jugador 1 lo hará y por lo tanto para él es óptimo bajar su nivel de esfuerzo. En equilibrio ambos jugadores se esfuerzan menos, pero el jugador 2 se esfuerza más por tener menores costos de esforzarse.