Universidad de Chile
Departamento de Física
Mecánica FI-2001
Profesor : Andres Escala
Auxiliares : Diego Paez, Alexis Yáñez

Auxiliar # 1 - Sistema de Coordenadas

Relaciones Útiles

- Coordenadas Cilindricas

$$\hat{\rho} = \hat{i}cos\phi + \hat{j}sin\phi \ , \qquad \hat{\phi} = -\hat{i}sin\phi + \hat{j}cos\phi$$
$$\dot{\hat{\rho}} = \dot{\phi}\hat{\phi} \ , \qquad \dot{\hat{\phi}} = -\dot{\phi}\hat{\rho}$$

- Coordenadas Esféricas

$$\hat{r} = (\hat{i}cos\phi + \hat{j}sen\phi)sin(\theta) + \hat{k}cos\theta$$
$$\hat{\theta} = (\hat{i}cos\phi + \hat{j}sin\phi)cos(\theta) - \hat{k}sin\theta$$
$$\hat{\phi} = -\hat{i}sin\phi + \hat{j}cos\phi$$
$$\dot{\hat{r}} = \dot{\phi}\hat{\phi}sin\theta + \dot{\theta}\hat{\theta}, \quad \dot{\hat{\theta}} = \dot{\phi}\hat{\phi}cos\theta - \dot{\theta}\hat{r}, \quad \dot{\hat{\phi}} = -\dot{\phi}(\hat{\theta}cos\theta + \hat{r}sin\theta)$$

Problema 1

Se observa una partícula en movimiento con respecto a un sistema de referencia inercial. La trayectoria está dada por las siguientes funciones:

$$\rho = Ae^{k\theta}, \qquad z = h\rho$$

donde ρ, θ y z son las respectivas coordenadas cilíndricas (con A, k, h positivos). Suponiendo que su rapidez es constante (v_0) y conocida:

1. Calcule la velocidad $\vec{v}$ de la partícula en funcion de θ, A , k , h y v_0.
2. Encuentre su aceleración $\vec{a}$ en función de los mismos parametros.
3. Pruebe que $\vec{a} \perp \vec{v}$.
4. Encuentre una expresión para $\theta(t)$.

Resultados

1. $\vec{v} = \frac{v_o}{\sqrt{k^2+1+k^2h^2}}(k\hat{\rho} + \hat{\theta} + hk\hat{k})$
2. $\vec{a} = \frac{v_o^2}{Ae^{k\theta}\sqrt{k^2+1+k^2h^2}}(k\hat{\theta} - \hat{\rho})$
3. hacer producto punto entre $\vec{a}$ y $\vec{v}$, y verificar que resultado es cero.
4. $\theta(t) = \frac{1}{k}ln(\frac{kv_ot}{A\sqrt{k^2+1+k^2h^2}} + kc)$

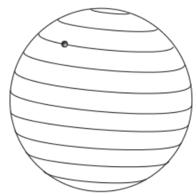
Problema 2

Considere una curva espiral descrita en coordenadas esféricas por las ecuaciones:

$$r = R, \quad \phi = N\theta$$

donde R y N son constantes conocidas (N entero par). Una partícula se mueve sobre la espiral partiendo desde el extremo superior ($\theta = 0$) y manteniendo una velocidad angular zenital constante y conocida, $\theta = \omega_0$. Se pide:

1. Utilizando coordenadas esféricas, escriba los vectores velocidad y aceleración para una posición arbitraria de la partícula sobre su trayectoria.
2. Determine el valor del radio de curvatura de la trayectoria en el ecuador ($\theta = 90^o$).
3. Encuentre una expresión para la longitud total de la espiral. Indicación: De ser difícil de calcular, puede dejar expresada la integral.



Solución

1. De acuerdo a las datos, se tiene que la posición en esfericas viene dada por:

$$\overrightarrow{r} = R\hat{r}$$

derivamos esta expresión para obtener la velocidad y reemplazamos $\phi = N\theta$, $\dot{\theta} = \omega_0$, ademas $\dot{\phi} = N\dot{\theta} = N\omega_0$.

$$\dot{\overrightarrow{r}} = R(\hat{\phi}N\omega_o sen\theta + \hat{\theta}\omega_o)$$

repetimos el procedimiento para obtener la aceleracion.

$$\overrightarrow{a} = R\omega_0[\hat{r}(-N^2\omega_0 sen^2\theta - \omega_0) + \hat{\phi}(2N\omega_o cos\theta) - \hat{\theta}(N^2\omega_o sen\theta cos\theta)]$$

2. Se sabe que $\rho_c = \frac{v^3}{\|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{v}\|}$ como nos piden el radio de curvatura para $\theta = 90^o$ reemplazamos este valor en las expresiones anteriores, obtenemos la rapidez y realizamos el producto cruz entre los vectores.

$$v = R\omega_0\sqrt{N^2+1} \qquad \|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{v}\| = R^2\omega_0^3(N^2+1)^{3/2}$$

$$\Rightarrow \rho_c = R.$$

3. Se sabe que la integral de linea viene dada por

$$\int \|\frac{\overrightarrow{dr}}{dt}\|dt = \int \|\overrightarrow{v}\|dt = R\int_0^\pi \sqrt{N^2 sen^2\theta + 1}d\theta$$