Soluciones de algunos problemas de la auxiliar.

$\boxed{\textbf{P1}}$

(a) Escogemos un sistema de referencia no inercial tal como se muestra en la figura, solidario con la estructura. La densidad lineal es $\lambda = \frac{dm}{dl} = \frac{2M}{\pi R}$, donde $dl = Rd\alpha \Rightarrow dm = \lambda R d\alpha$. El momento de inercia en su forma compacta se escribe como $I_{ij} = \int (r^2\delta_{ij} - r_i r_j)dm$. En particular tomaremos $\vec{r} = R(\cos\alpha\hat{x}' + \operatorname{sen}\alpha\hat{y}')$, descrito usando los vectores unitarios asociados al sistema solidario, con lo cual $x' = R\cos\alpha$, $y' = R\operatorname{sen}\alpha$ y $z' = 0$, que por comodidad, a veces se denotan simplemente como x e y, donde el contexto deja claro de qué se está hablando.

- $I_{11} = I_{xx} = \int (x^2 + y^2 + z^2 - x\cdot x)dm = \int (y^2 + z^2)dm.$

$$\begin{aligned}
I_{xx} &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} R^2\operatorname{sen}^2\alpha\lambda R d\alpha = \frac{2MR^2}{\pi}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\operatorname{sen}^2\alpha d\alpha = \frac{2MR^2}{\pi}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{1-\cos(2\alpha)}{2}d\alpha = \frac{MR^2}{\pi}\left[\alpha - \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{2}\right]_{-\pi/4}^{\pi/4} \\
I_{xx} &= MR^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\right)
\end{aligned}$$

- $I_{yy} = \int (x^2 + y^2 + z^2 - y\cdot y)dm = \int (x^2 + z^2)dm.$

$$\begin{aligned}
I_{yy} &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} R^2\cos^2\alpha\lambda R d\alpha = \frac{2MR^2}{\pi}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos^2\alpha d\alpha = \frac{2MR^2}{\pi}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{1+\cos(2\alpha)}{2}d\alpha = \frac{MR^2}{\pi}\left[\alpha + \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{2}\right]_{-\pi/4}^{\pi/4} \\
I_{yy} &= MR^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\right)
\end{aligned}$$

- $I_{zz} = \int (x^2 + y^2 + z^2 - z\cdot z)dm = \int (x^2 + y^2)dm \Rightarrow I_{zz} = \frac{2MR^2}{\pi}\frac{\pi}{2} = MR^2$

- $I_{xy} = \int (-x\cdot y)dm$

$$\begin{aligned}
I_{xy} &= -\frac{MR^2}{\pi}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\operatorname{sen}(2\alpha)d\alpha = \left[\frac{MR^2}{2\pi}\cos(2\alpha)\right]_{-\pi/4}^{\pi/4} = 0 \\
\Leftrightarrow I_{xz} &= I_{zx} = I_{zy} = I_{yz} = 0 \text{ ya que } z = 0
\end{aligned}$$

Así la matriz de inercia con respecto a O será

$$I_O = MR^2\begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) El centro de masa lo encontramos del siguiente modo:

$$\begin{aligned}
\vec{R}_G &= \frac{1}{M}\int\vec{r}dm = \frac{1}{M}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}(R\cos\alpha\hat{x}' + R\operatorname{sen}\alpha\hat{y}')\lambda R d\alpha = \frac{\lambda R^2}{M}\left[\operatorname{sen}\alpha\hat{x}' - \cos\alpha\hat{y}'\right]_{-\pi/4}^{\pi/4} \\
\Rightarrow \vec{R}_G &= \frac{2\sqrt{2}R}{\pi}\hat{x}'
\end{aligned}$$

Que es el centro de masa del sistema con respecto al sistema cartesiano móvil.

(c) Suponemos que la velocidad angular del sistema es de la forma $\vec{\Omega} = \dot{\theta}\hat{z}'$, así la energía cinética del sistema será

$$T = \frac{1}{2}\vec{\Omega}^T I \vec{\Omega} = \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2$$

Fijando el nivel cero de energía potencial en el punto O, justo en el origen, se tiene que la energía potencial será

$$V = -Mg\frac{2\sqrt{2}R}{\pi}\cos\theta$$

De este modo el Lagrangeano será

$$L = T - V = \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2 + Mg\frac{2\sqrt{2}R}{\pi}\cos\theta$$

(d) Si nuestra coordenada generalizada es $q = \theta$, la ecuación de Euler-Lagrange se puede expresar

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}) - \frac{\partial L}{\partial q} &= 0 \\
MR^2\ddot{\theta} + Mg\frac{2\sqrt{2}R}{\pi}\operatorname{sen}\theta &= 0 \\
\ddot{\theta} + \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\frac{g}{R}\operatorname{sen}\theta &= 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto la frecuencia de pequeñas oscilaciones será

$$\omega_{po} = \sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\frac{g}{R}}$$

$\boxed{\textbf{P2}}$

Queda Propuesto. La idea es seguir de forma análoga a como se hizo en el problema anterior, sacando la energía cinética y potencial del sistema. Hacerlo para una partícula y luego para las dos.