Guía de Sistemas Extendidos y Sólidos Rígidos

Profesor: Mario Riquelme H.

Auxiliares: Andres Bellei, Lorenzo Plaza.

P1

Considere una vara ideal sin masa, de largo $L = Nb$, cuyo extremo P está fijo y que tiene N partículas iguales de masa m, todas a distancia b de la anterior y la primera a distancia b del punto P. Ver figura.

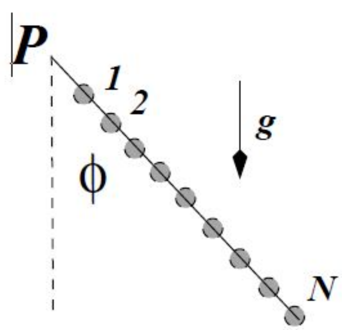
(a) Escogiendo con cuidado un sistema de referencia no inercial S' obtenga la matriz de inercia I^P de este sistema.

(b) De lo anterior obtenga el momento angular $\vec{l}_P$ en un sistema de referencia inercial suponiendo que el sistema se mueve alrededor de un eje que pasa por P y es perpendicular al plano del dibujo. En particular debe indicar la forma vectorial de la velocidad angular del sistema.

(c) Deduzca el torque que el peso produce sobre este sistema y obtenga la ecuación dinámica asociada a este caso.

(d) Determine el límite de la matriz de inercia, momento angular y torque cuando $N \to \infty$ mientras $b = L/N$ y $m = M/N$ tienden a cero pero $L = Nb$ y $M = Nm$ son fijos y finitos. En este límite obtenga la frecuencia de pequeñas oscilaciones del sistema.

$$\sum_{n=1}^{N} n = \tfrac{N(N+1)}{2},\ \sum_{n=1}^{N} n^2 = \tfrac{N(N+1)(2N+1)}{6},\ \sum_{n=1}^{N} n^3 = (\tfrac{N(N+1)}{2})^2$$



P2

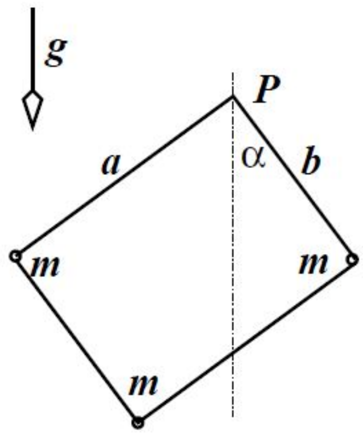
Tres partículas de masa m están en los vértices de un rectángulo de lados a y b, con $a = \sqrt{3}b$, formado por varas ideales de masa despreciable. El cuarto vértice está fijo a un punto P (ver figura). El rectángulo puede girar en torno a un eje que pasa por P y es perpendicular a la figura.

(a) Obtenga el momento de inercia $I_{P,\hat{n}}$ del sistema donde $\hat{n}$ es un vector unitario perpendicular al plano del rectángulo.

(b) Usando $I_{P,\hat{n}}$ escriba la energía cinética y el momento angular del sistema.

(c) Obtenga la energía potencial $U(\alpha)$ debido al peso y determine el valor α_0 para el cual U tiene un mínimo. Defina $\phi = \alpha - \alpha_0$ y reescriba U como función de ϕ en la forma más simplificada posible.

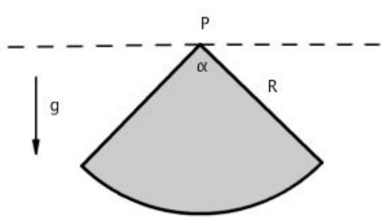
(d) Determine la frecuencia de pequeñas oscilaciones del sistema.



P3

(a) Obtenga la matriz de inercia con respecto al punto P (ver figura) de una lámina de una forma de sector de círculo de radio R y apertura $\alpha = \frac{\pi}{2}$. La masa de la lámina es M y su densidad σ (masa por unidad de superficie) es uniforme.

(b) Obtenga la frecuencia de pequeña oscilaciones de esta lámina en torno al punto de P cuando oscila en el plano de la figura y cuando oscila en torno en torno al eje dibujado con trazos y puntos.



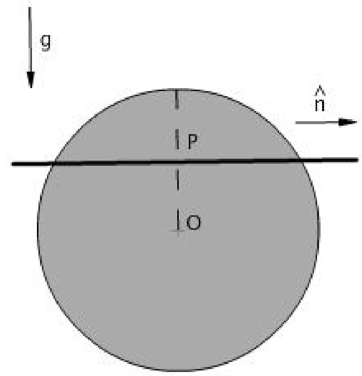
P4

Se tiene una placa circular de radio R y densidadd de masa uniforme $\sigma_0 = \frac{M}{\pi R^2}$ que puede oscilar, debido a su propio peso , en torno a un eje fijo horizontal (dirección $\hat{n}$) que coincide con una cuerda del círculo a distancia $\frac{R}{2}$ del centro O (ver figura).

(a) Determine los momentos de inercia $I_{O,\hat{n}}$ e $I_{P,\hat{n}}$.

(b) Obtenga la ecuación de movimiento.

(c) Obtenga la frecuencia de pequeñas oscilaciones del sistema.



P5

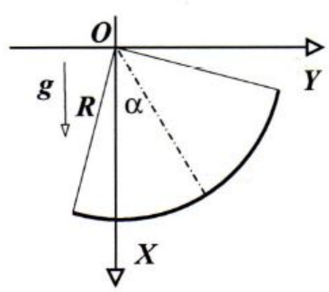
Se tiene un arco de cuarto de circunferencia de masa M, radio R y de densidad de masa uniforme (en unidades K/m y cuyo valor debe determinar) unida al origen por barras rectas ideales sin masa. EI sistema puede oscilar en torno a su centro O. La figura muestra a la lámina fija en un momento de su oscilación en el propio plano del arco, donde α es el ángulo que forma la vertical (eje X) con la bisectriz del ángulo recto.

(a) Obtenga la matriz de inercia del sistema con respecto a ejes apropiados (que debe explicar con c1aridad).

(b) Obtenga el momento angular $\vec{l}_O$ del sistema para cualquier velocidad angular $\dot{\alpha}$

(c) Obtenga el torque $\vec{\tau}_O$ sobre el sistema y la ecuación para α y deduzca la frecuencia de las pequeñas oscilaciones.

(d) Suponga que el sistema oscila en tome al eje Y de la figura: obtenga el momenta angular, el torque y la frecuencia de las pequeñas oscilaciones.



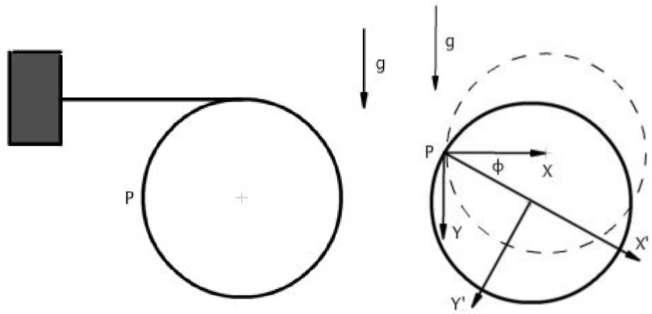
P6

Un alambre circunferencial (un aro) de densidad uniforme, masa M y radio R puede rotar alrededor de un punto P del aro mismo.

(a) Obtenga la matriz de inercia I^G del aro así como la matriz de inercia I^P.

(b) inicialmente el aro está sujeto por un hilo horizontal que es tangencial a la circunferencia de tal modo que el centro del aro está a la misma altura que P, como lo muestra la figura de arriba. Determine la tensión del hilo.

(c) Si se corta el hilo, determine la velocidad angular del aro en el momento en que el centro de la circunferencia cruza la vertical que pasa por P.



P7

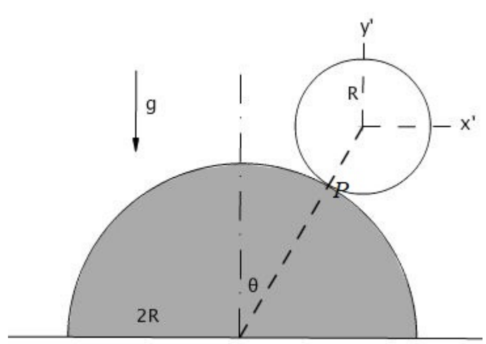
Un disco de radio R y masa m se encuentra en el punto más alto de un semi-cilindro de radio $2R$, con el cual tiene un coeficiente de roce estático μ_e . En un cierto instante una pequeña perturbación saca el disco de su posición de equilibrio, y comienza a rodar sin resbalar sobre el semi-cilindro

(a) Demuestre que cuando el centro del disco se ha movido en un ángulo θ, el disco ha girado un ángulo $\phi = 3\theta$ respecto del sistema móvil (x',y') que se traslada asociado a su centro de masa.

(b) Escriba una ecuación de movimiento del centro de masa del disco, respecto de un sistema fijo, y la ecuación de movimiento del disco que representa su rotación respecto del sistema móvil que se traslada asociado a su centro de masa. (nota: identifique claramente las fuerzas que actúan y los ejes de los sistemas de referencia que utilice).

(c) Determine una ecuación para el ángulo θ^* en el cual se produce deslizamiento en la superficie de contacto entre el disco y el semi-cilindro.

Nota: El momento de inercia del disco respecto de un eje perpendicular a él, que pasa por su centro, es $I = \frac{MR^2}{2}$. Considere como datos conocidos m, R, μ_e.



P8

Un disco homogéneo de radio a y masa M rueda sin resbalar sobre una superficie cilíndrica de eje horizontal y radio R, como se muestra en la figura.

(a) Escriba las ecuaciones de movimiento para el centro de masa del disco.

(b) Determine el periodo de las pequeñas oscilaciones en torno a la posición de equilibrio estable.