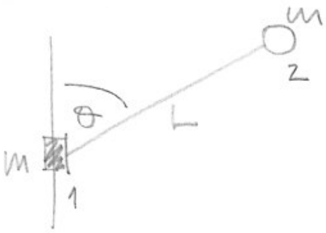
P6.9 Kim



En un ambiente sin gravedad, considere un anillo de masa m que desliza sin roce a lo largo de una barra. El anillo está unido a una partícula de masa m, a través de una cuerda de largo L. En el instante inicial, con la cuerda totalmente extendida, $\theta(t=0)=0$ y $\dot{\theta}(t=0)=\frac{v_0}{L}$

(a) Determine $\dot{\theta}$ como función de θ

(b) Determine la fuerza que la barra ejerce sobre el anillo para $\theta=\pi/2$

Solución $\left(m\vec{a}\,' = \vec{F} - m\ddot{\vec{R}} - m\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}\,') - 2m\vec{\Omega}\times\vec{v}\,' - m\dot{\vec{\Omega}}\times\vec{r}\,' \right)$

(a) Noten que este problema se resuelve de la misma forma ya sea con coordenadas esféricas o cilíndricas. Elijamos coordenadas esféricas.

El sistema no inercial se puede elegir de 2 maneras:

(i) Con centro en el anillo (1) y $\vec{\Omega}=0$

(ii) Con centro en el anillo y $\vec{\Omega}=\dot{\theta}\hat{\phi}$

Resolvamos el problema con las 2 alternativas

(i) $\vec{r}\,' = L\hat{r}$

$\vec{v}\,' = L\dot{\theta}\hat{\theta}$

$\vec{a}\,' = -L\dot{\theta}^2\hat{r} + L\ddot{\theta}\hat{\theta}$

$\vec{F} = -T\hat{r}$

$m\ddot{\vec{R}} = T\cos\theta\,(\cos\theta\,\hat{r} - \operatorname{sen}\theta\,\hat{\theta})$

$\vec{\Omega} = 0$

$\Rightarrow m(-L\dot{\theta}^2\hat{r} + L\ddot{\theta}\hat{\theta}) = -T\hat{r} - T\cos\theta\,(\cos\theta\,\hat{r} - \operatorname{sen}\theta\,\hat{\theta})$

$\Rightarrow \hat{r}]\quad +mL\dot{\theta}^2 = +T(1+\cos^2\theta)$

$\hat{\theta}]\quad mL\ddot{\theta} = T\cos\theta\operatorname{sen}\theta$

(ii) $\vec{r}' = L\hat{r}$; $\boxed{\vec{v}' = 0}$; $\boxed{\vec{a}' = 0}$ ← S' solidario a la partícula 2

$\vec{F} = -T\hat{r}$

$m\ddot{\vec{R}} = T\cos\theta\,(\cos\theta\,\hat{r} - \operatorname{sen}\theta\,\hat{\theta})$

$\vec{\Omega} = \dot{\theta}\,\hat{\phi}$

$$\Rightarrow -m\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}') = -m\dot{\theta}^2 L\,\overbrace{\hat{\phi}\times(\hat{\phi}\times\hat{r})}^{\hat{\theta}} = +m\dot{\theta}^2 L\,\hat{r}$$

$$-m\dot{\vec{\Omega}}\times\vec{r}' = -m\ddot{\theta}L\,\hat{\phi}\times\hat{r} = -m\ddot{\theta}L\,\hat{\theta}$$

Como $\cancel{m\vec{a}'} = \vec{F} - m\ddot{\vec{R}} - m\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}') - \cancel{2m\vec{\Omega}\times\vec{v}'} - m\dot{\vec{\Omega}}\times\vec{r}'$

$$\Rightarrow \quad 0 = -T\hat{r} - T\cos\theta(\cos\theta\,\hat{r} - \operatorname{sen}\theta\,\hat{\theta}) + m\dot{\theta}^2 L\,\hat{r} - m\ddot{\theta}L\,\hat{\theta}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{r}\big] \quad +mL\dot{\theta}^2 = +T(1+\cos^2\theta) \qquad (1)$$

$$\hat{\theta}\big] \quad mL\ddot{\theta} = T\cos\theta\operatorname{sen}\theta \qquad (2)$$

Que es lo mismo que se obtuvo en (i)

Ahora (2)/(1)

$$\Rightarrow \quad \frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}^2} = \frac{\cos\theta\operatorname{sen}\theta}{1+\cos^2\theta} \qquad /2\dot{\theta}$$

$$\frac{1}{\dot{\theta}^2}\frac{d\dot{\theta}^2}{dt} = \frac{2\cos\theta\operatorname{sen}\theta}{1+\cos^2\theta}\frac{d\theta}{\cancel{dt}} \qquad /\int$$

$$\ln\dot{\theta}^2\Big|_{v_0/L}^{\dot{\theta}} = -\ln(1+\cos^2\theta)\Big|_0^{\theta}$$

$$\ln\frac{\dot{\theta}^2 L^2}{v_0^2} = \ln\frac{2}{1+\cos^2\theta}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\theta}^2 = \frac{v_0^2}{L^2}\frac{2}{1+\cos^2\theta} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dot{\theta} = \frac{v_0}{L}\sqrt{\frac{2}{1+\cos^2\theta}}}$$

(b) $N_{anillo}(\theta = \frac{\pi}{2}) = T(\theta = \frac{\pi}{2})$

De (1): $T = \dfrac{mL\dot{\theta}^2}{1+\cos^2\theta} = \dfrac{mL\, v_0^2\, 2}{L^2\,(1+\cos^2\theta)^2}$

$$\Rightarrow T = \frac{2m v_0^2}{L(1+\cos^2\theta)^2}$$

$$T(\theta = \pi/2) = \frac{2m v_0^2}{L}$$

$$\Rightarrow \boxed{N_{anillo}(\theta = \frac{\pi}{2}) = \frac{2m v_0^2}{L}}$$