Auxiliar # N+1
Movimiento relativo

Lo que tenemos que saber ...

Recordemos que todo vector $\vec{a}$ que satisface la propiedad $\vec{a}\cdot\vec{a} =$ constante tiene como primera derivada temporal :

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \vec{\omega}_a \times \vec{a} \longrightarrow$$ visto desde un sistema de referencia inercial .

Si S es un sistema de referencia inercial y S' es un sistema con movimiento relativo a S (puede estar acelerado o no) , entonces :

$$\vec{a} = a_i \hat{e}_i = a'_i \hat{e}'_i$$: convención de sumas de Einstein

$a_i \hat{e}_i$ → vector visto desde S

$a'_i \hat{e}'_i$ → vector visto desde S' .

Entonces : $\left.\frac{d\vec{a}}{dt}\right|_S = \frac{da_i}{dt}\hat{e}_i$; $\left.\frac{d\vec{a}}{dt}\right|_{S'} = \frac{da'_i}{dt}\hat{e}'_i$

→ El vector $\hat{e}_i$ es fijo en S
El vector $\hat{e}'_i$ es fijo en S'

sin embargo, el vector $\hat{e}'_i$ no es fijo en S

$$\therefore \quad \left.\frac{d\hat{e}'_i}{dt}\right|_S \neq \vec{0}$$

luego: $$\left.\frac{d\vec{a}}{dt}\right|_S = \frac{da'_i}{dt}\,\hat{e}'_i + a'_i \left.\frac{d\hat{e}'_i}{dt}\right|_S$$

variación temporal de $\vec{a}$ visto desde S.

$$= \left.\frac{d\vec{a}}{dt}\right|_{S'} + a'_i \left.\frac{d\hat{e}'_i}{dt}\right|_S$$

variación temporal de $\vec{a}$ visto desde S'.

pero $$\left.\frac{d\hat{e}'_i}{dt}\right|_S = \vec{\Omega}_{S'S} \times \hat{e}'_i$$

$\vec{\Omega}_{S'S}$: velocidad angular del sist. S' visto desde S (sist. inercial)

$$\therefore \quad a'_i \left.\frac{d\hat{e}'_i}{dt}\right|_S = a'_i \left(\vec{\Omega}_{S'S} \times \hat{e}'_i\right) = \vec{\Omega}_{S'S} \times \left(a'_i\,\hat{e}'_i\right)$$

$$= \vec{\Omega}_{S'S} \times \vec{a} \ .$$

$\therefore$ Regla de Derivación $$\boxed{\left.\frac{d\vec{a}}{dt}\right|_S = \left.\frac{d\vec{a}}{dt}\right|_{S'} + \vec{\Omega}_{S'S} \times \vec{a}}$$

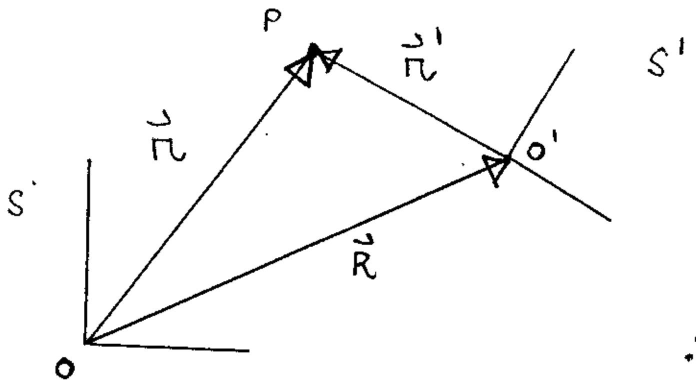
§ Relación entre velocidades.

Tenemos : $\boxed{\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}\,'}$ (1)

$\vec{R}$: vector que relaciona los orígenes O' y O de los sist. S' y S respectivamente.

$\vec{r}\,'$: vector visto desde S'

$\vec{r}$: vector visto desde S.



luego :

$$\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_S = \left.\frac{d\vec{R}}{dt}\right|_S + \left.\frac{d\vec{r}\,'}{dt}\right|_S$$

$$\therefore \ \vec{v} = \dot{\vec{R}} + \left.\frac{d\vec{r}\,'}{dt}\right|_{S'} + \vec{\Omega}_{S'S} \times \vec{r}\,'$$

$$\boxed{\vec{v} = \dot{\vec{R}} + \vec{v}\,' + \vec{\Omega}_{S'S} \times \vec{r}\,'} \quad (2)$$

§ Relación entre aceleraciones

$$\left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right|_S = \left.\frac{d\dot{\vec{R}}}{dt}\right|_S + \left.\frac{d\vec{v}\,'}{dt}\right|_S + \left.\frac{d}{dt}\left(\vec{\Omega}_{S'S} \times \vec{r}\,'\right)\right|_S$$

$$\vec{a} = \ddot{\vec{R}} + \left.\frac{d\vec{v}\,'}{dt}\right|_{S'} + \vec{\Omega}_{S'S} \times \vec{v}\,' + \left.\frac{d}{dt}\vec{\Omega}_{S'S}\right|_S \times \vec{r}\,'$$

$$+ \vec{\Omega}_{S'S} \times \left.\frac{d\vec{r}\,'}{dt}\right|_S$$

Luego :

$$\vec{a} = \ddot{\vec{R}} + \vec{a}' + \vec{\Omega}_{s's} \times \vec{v}' + \dot{\vec{\Omega}}_{s's} \times \vec{r}'$$
$$+ \vec{\Omega}_{s's} \times \left(\vec{v}' + \vec{\Omega}_{s's} \times \vec{r}' \right)$$
$$= \ddot{\vec{R}} + \vec{a}' + 2\vec{\Omega}_{s's} \times \vec{v}' + \dot{\vec{\Omega}}_{s's} \times \vec{r}'$$
$$+ \vec{\Omega}_{s's} \times \left(\vec{\Omega}_{s's} \times \vec{r}' \right) .$$

Lo anterior se reescribe como :

$$\underbrace{\vec{a}'}_{\substack{\text{Relacionado con la dinámica}\\ \text{del problema (visto desde } s)}} = \vec{a} - \Big\{ \underbrace{\ddot{\vec{R}}}_{\text{Relación entre sistemas}} + \underbrace{2\vec{\Omega}_{s's} \times \vec{v}'}_{\substack{\text{Término}\\ \text{de Coriolis}}} + \underbrace{\dot{\vec{\Omega}}_{s's} \times \vec{r}'}_{\substack{\text{Término}\\ \text{transversal}}}$$
$$+ \underbrace{\vec{\Omega}_{s's} \times \left(\vec{\Omega}_{s's} \times \vec{r}' \right)}_{\substack{\text{Término}\\ \text{centrífugo}}} \Big\}$$

o sea :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Aceleración} \\ \text{vista desde} \\ s' \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Aceleración} \\ \text{vista desde} \\ s \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{Términos no inerciales} \\ \text{Aceleraciones} \\ \text{fantasmas} \end{array} \right\}$$

De esto nace el término "Fuerza fantasma".
Luego :

$$\boxed{m\vec{a}' = m\vec{a} + \vec{F}_s + \vec{F}_{cor} + \vec{F}_{tran} + \vec{F}_{cent}} \quad (3)$$

$\vec{F}_s = -m\ddot{\vec{R}}$: Fuerza fantasma debido a la relación entre sistemas (carácter traslacional)

$\vec{F}_{cor} = -2m\vec{\Omega}_{s's} \times \vec{v}'$: Fuerza de coriolis (carácter rotacional)

$\vec{F}_{tran} = -m\dot{\vec{\Omega}}_{s's} \times \vec{r}'$: Fuerza transversal (carácter rotacional)

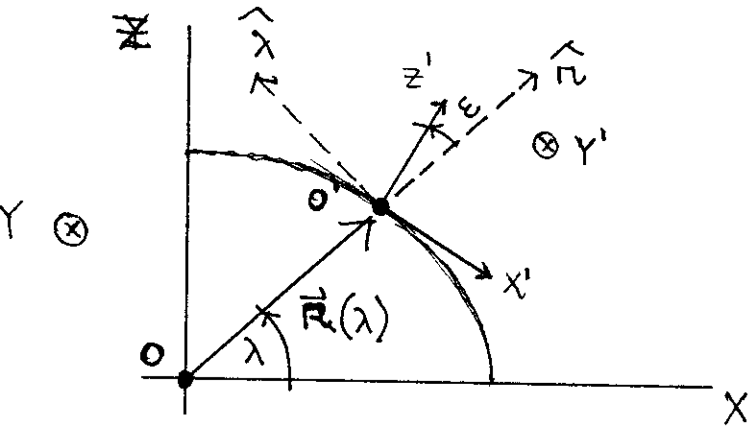
$\vec{F}_{cent} = -m\vec{\Omega}_{s's} \times (\vec{\Omega}_{s's} \times \vec{r}')$: Fuerza centrífuga (cuadrático en $\Omega_{s's}$).

No olvidar que $m\vec{a} = \sum \vec{F}_{ext}$: 2^{da} Ley Newton

→ Utilizar correctamente (1), (2) y (3) implica establecer correctamente las relaciones entre sistemas.

problema : Encontrar una expresión que relacione la aceleración de gravedad con la latitud terrestre.

1.– La rotación de la Tierra provoca que el planeta esté achatado en los polos. Utilizaremos el siguiente sist. de referencia.



Juanito, un observador sobre la superficie, está en O'

$\therefore \quad \vec{r}\,' = \vec{0}$

$\vec{r} = \vec{R}$

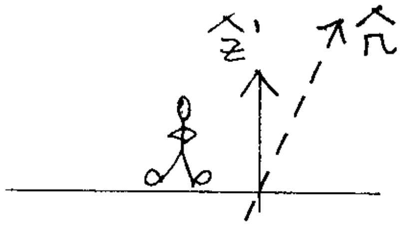
2.– Juanito está en equilibrio mecánico en $S' \longrightarrow \vec{a}\,' = 0$

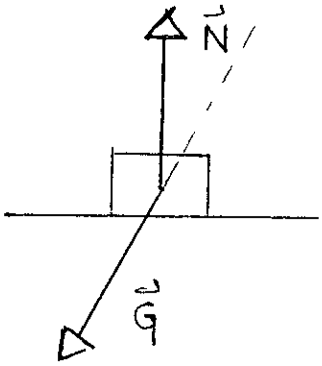
λ : latitud (ángulo)

ε : Desviación c/r a la vertical (ángulo)

$\longrightarrow$ ε es una medida que involucra el achatamiento de la Tierra.

Fuerzas externas :





$$\vec{N} = N\hat{z}'$$
$$\vec{G} = -\frac{GMm}{R^2}\hat{r}$$

$$\therefore \quad m\vec{a} = \vec{F}_{ext} = N\hat{z}' - \frac{GMm}{R^2}\hat{r}$$

3.- contribución fzas. fantasmas

Tenemos : $\vec{r}' = 0$

$\vec{v}' = 0$

$\dot{\vec{\Omega}} = 0$: Rotación de la Tierra es con velocidad angular constante.

De la fórmula maestra :

$$m\vec{a}' = m\vec{a} - m\left\{\ddot{\vec{R}} + 2\vec{\Omega}\times\vec{v}' + \dot{\vec{\Omega}}\times\vec{r}' + \vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}')\right\}$$

$$\longrightarrow \vec{0} = N\hat{z}' - \frac{GMm}{R^2}\hat{r} - m\ddot{\vec{R}} \qquad (4)$$

pero $\dot{\vec{R}} = \vec{\Omega}\times\vec{r}$

$\ddot{\vec{R}} = \vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r})$ $\quad$ ver hipótesis 1

Hipótesis 1 : $\frac{dR}{d\lambda}$ es despreciable .

$\longrightarrow$ esto es posible sustentarlo ya que

$R_{ecuador} = 6378,4$ [km]

$R_{polo} = 6356,8$ [km] .

$\Delta R \sim 20$ [km] ; $\overline{R} = 6371$ [km] .

∞ Nota : Acordarse que

$\vec{\omega} = \frac{\vec{R} \times \dot{\vec{R}}}{R^2}$ con $\vec{R} \cdot \dot{\vec{R}}$ variable .

por ello surge la necesidad de plantear esta hipótesis .

$\therefore$ El perímetro de Tierra visto "circularmente" es : $P = 40.030,2$ [km] .

$\longrightarrow$ $\frac{1}{4}$ de perímetro

$P_{1/4} = 10007,5$ [km]

El perímetro de Tierra visto "achatadamente" es : $\overline{P} = 40008,8$ [km]

$\overline{P}_{1/4} = 10002,2$ [km] .

$\overline{P} = \pi \left(R_{ecuador} + R_{polo} \right)$

$\therefore \; \Delta P_{1/4} = P_{1/4} - \bar{P}_{1/4} = 5{,}3 \; [km]$

$\longrightarrow$ una escala muy chica en comparación con los $P_{1/4}$ calculados.

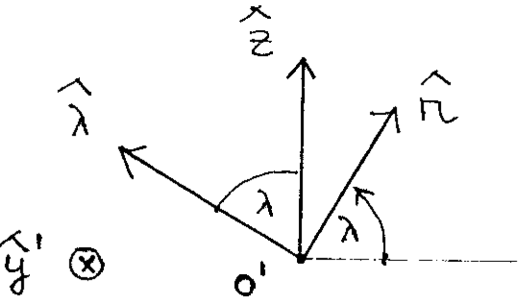
$\therefore$ Podemos despreciar la variación de R c/r a λ.

calculemos:

$$\ddot{\vec{R}} = \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{\Omega} = \omega \hat{z} \\ \vec{r} = R\hat{r} \end{array}\right. \longrightarrow \ddot{\vec{R}} = \omega^2 R \; \hat{z} \times (\hat{z} \times \hat{r}) .$$

¿ como caracterizan los sist. de referencia ?



$$\hat{z} = \cos\lambda \, \hat{\lambda} + \sin\lambda \, \hat{r}$$

$$\hat{z} \times \hat{r} = \cos\lambda \; \hat{\lambda} \times \hat{r}$$

pero $\hat{\lambda} \times \hat{r} = \hat{y}'$

$$\therefore \; \hat{z} \times \hat{r} = \cos\lambda \; \hat{y}' .$$

$$\longrightarrow \hat{z} \times (\hat{z} \times \hat{r}) = \cos^2\lambda \; \hat{\lambda} \times \hat{y}' + \sin\lambda\cos\lambda \; \hat{r} \times \hat{y}'$$

$$= -\cos^2\lambda \, \hat{r} + \sin\lambda\cos\lambda \; \hat{\lambda}$$

$$= (\sin^2\lambda - 1)\hat{r} + \sin\lambda\cos\lambda \; \hat{\lambda}$$

$$= \sin\lambda \left[\sin\lambda \, \hat{r} + \cos\lambda \, \hat{\lambda} \right] - \hat{r}$$

$$\therefore \quad \hat{z} \times (\hat{z} \times \hat{n}) = \sin\lambda\, \hat{z} - \hat{n} \; .$$

$$\therefore \quad \ddot{\vec{R}} = \omega^2 R \cdot (\sin\lambda\, \hat{z} - \hat{n}) \; .$$

Luego, la ecu. (4) se escribe como:

$$\vec{0} = N\hat{z}' - \frac{GMm}{R^2}\hat{n} - m\omega^2 R (\sin\lambda\,\hat{z} - \hat{n}) \; .$$

$$-N\hat{z}' = -\frac{GMm\hat{n}}{R^2} - m\omega^2 R (\sin\lambda\,\hat{z} - \hat{n}) \; .$$

$$N\hat{z}' = \left[\frac{GMm}{R^2} - m\omega^2 R\right]\hat{n} + m\omega^2 R \sin\lambda\,\hat{z} \; .$$

pero N es la medida del peso de Juanito. Luego $N = mg$.

$$\therefore \quad g\hat{z}' = \left[\frac{GM}{R^2} - \omega^2 R\right]\hat{n} + \omega^2 R\sin\lambda\,\hat{z} \qquad (5)$$

Calculamos:

$-\vec{g} = g\hat{z}' \longrightarrow * \; \vec{g}\cdot\vec{g} = g^2$

$$\therefore \quad \vec{g}\cdot\vec{g} = \left[\frac{GM}{R^2} - \omega^2 R\right]^2 + \omega^4 R^2 \sin^2\lambda$$
$$+ 2\left[\frac{GM}{R^2} - \omega^2 R\right]\omega^2 R \sin^2\lambda$$

∞ Nota: si $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$

$$\longrightarrow \vec{a}\cdot\vec{a} = (\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{b}+\vec{c})$$
$$= \vec{b}\cdot\vec{b} + 2\vec{b}\cdot\vec{c} + \vec{c}\cdot\vec{c}$$
$$= b^2 + 2\vec{b}\cdot\vec{c} + c^2$$

Reordenando lo anterior se obtiene que:

$$\boxed{g^2 = \left(\frac{GM}{R^2}\right)^2 - \left(\frac{2GM}{R} - R^2\omega^2\right)\omega^2\cos^2\lambda} \quad (6)$$

Ecuación pedida.

Acordarse que $R = R(\lambda)$.

Para $\lambda = \pi/2 \Rightarrow R = R_{polo}$

$$\therefore \; g_{polo} = \frac{GM}{R_{polo}^2}$$

Para $\lambda = 0 \Rightarrow R = R_{ecuador}$

$$\therefore \; g_{ecuador} = \frac{GM}{R_{ecuador}^2} - \omega^2 R_{ecuador}.$$

Sea $\alpha = \dfrac{R_{polo}}{R_{ecuador}} \sim 0,997$

$\therefore \; \alpha^2 \sim 0,993 \sim \alpha$ Hasta 2 cifras significativas de α.

luego : $g_{ecuador} \sim \alpha \cdot \left(g_{polo} - \omega^2 R_{polo} \right)$.

sea $\beta = \dfrac{\omega^2 R_{polo}}{g_{polo}}$

$$\longrightarrow \boxed{g_{ecuador} \sim \alpha \, g_{polo} \left(1 - \beta \right)}.$$

Hipótesis 2 : Aproximamos $\alpha = 1$

$\Rightarrow R_{polo} = R_{ecuador} = \overline{R} = R_T$

$\overline{R} = 6371 \; [km]$

$$\therefore \quad g_{ecuador} \sim \cdot \, g_{polo} \left(1 - \beta \right)$$

Ademas, de (6) :

$$g^2 = \left(\frac{GM}{R_T^2} \right)^2 \cdot \left(1 - 2\beta \cos^2 \lambda + \beta^2 \cos^2 \lambda \right)$$

$\longrightarrow$ orden de magnitud de β .

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} \left[\frac{rad}{s} \right]$$

$$\omega \sim 7{,}2722 \cdot 10^{-5} \left[\frac{rad}{s} \right]$$

$O(\omega) \sim 10^{-5}$ muy chiquito .

$$G \sim 6{,}67 \cdot 10^{-11} \ [\text{unidades S.I}]$$

$$M_T \sim 5{,}97 \cdot 10^{+24} \ [kg].$$

$$R_T \sim 6371 \ [km].$$

$$\longrightarrow \frac{GM_T}{R_T^3} \sim 1{,}54 \cdot 10^{-6} \ [\text{unid. S.I}].$$

$$\therefore \quad \beta = \frac{\omega^2 R_T}{\frac{GM_T}{R_T^2}} \Rightarrow O(\beta) \sim 10^{-4}.$$

$\therefore \quad \beta \ll 1$ y podemos despreciar ordenes mayores de β.

$$\therefore \quad g \sim \left(\frac{GM}{R_T^2}\right) \cdot \left(1 - \beta \cos^2 \lambda\right)$$

$$\sim g_{polo} \cdot \left(1 - \beta \cos^2 \lambda\right).$$

$$\therefore \quad \boxed{g \sim g_{ecuador} \left(1 + \beta \sin^2 \lambda\right)} \qquad (7)$$

Primera aproximación variación g c/r a la latitud.

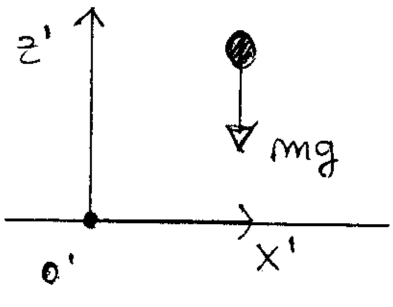
problema : Demostrar que los proyectiles tienden a desviarse en su trayectoria cuando son lanzados. Encontrar la ecn. itinerario que incluye efectos rotacionales terrestres.

Sabemos que $o(\omega) \sim 10^{-5}$. Además $\dot{\vec{\Omega}} = \vec{0}$ y $o(\ddot{\vec{R}}) \sim o(\omega^2)$ [lo despreciamos].

Luego, la ecn. maestra queda como :

$$m\vec{a}\,' = \vec{F} - 2m\vec{\Omega} \times \vec{v}\,' .$$

En el sist. S' :



$$\therefore \vec{F} = mg(-\hat{z}')$$

$$\therefore \boxed{\vec{a}\,' = -g\hat{z}' - 2\vec{\Omega} \times \vec{v}\,'}$$

Esto es válido para proyectiles moviéndose cerca de la sup. terrestre.

$\vec{\Omega}$: vector constante. Luego, integramos.

$$\longrightarrow \vec{v}\,' = \vec{v}_0\,' - gt\hat{z}' - 2\vec{\Omega} \times (\vec{r}\,' - \vec{r}_0\,')$$

Luego :

$$\vec{a}' = -g\hat{z}' - 2\vec{\Omega}\times\left(\vec{v}_0' - gt\hat{z}' - 2\vec{\Omega}\times(\vec{r} - \vec{r}_0')\right).$$

Despreciamos términos cuadráticos en Ω.
Luego :

$$\boxed{\vec{a}' = -g\hat{z}' - 2\vec{\Omega}\times\vec{v}_0' + 2gt\,\vec{\Omega}\times\hat{z}'} \quad (8)$$

Aceleración variable en el tiempo.

$\hat{z}'$: vector constante.

$\vec{\Omega}\times\vec{v}_0'$: vector constante.

Integramos :

$$\boxed{\vec{v}' = -gt\,\hat{z}' - 2t\,\vec{\Omega}\times\vec{v}_0' + gt^2\vec{\Omega}\times\hat{z}' + \vec{v}_0'} \quad (9)$$

$$\therefore \boxed{\begin{aligned}\vec{r}' = \vec{r}_0' + \vec{v}_0' t - \tfrac{1}{2}gt^2\hat{z}' - t^2\vec{\Omega}\times\vec{v}_0' \\ + \tfrac{1}{3}gt^3\vec{\Omega}\times\hat{z}'\end{aligned}} \quad (10)$$

Ecuaciones itinerario.

usando el sist. de referencia del problema 1, encontramos que:

$\vec{\Omega} \times \hat{z}' = \omega \cos\lambda \; \hat{y}'$: contribuye a desviar el proyectil hacia el este.

~~...~~

problema de aplicación

una partícula se lanza verticalmente hacia arriba con velocidad v_0 en algun pto. de latitud λ. Encontrar el pto. sobre el que vuelve a caer si se toma en cuenta la rotación de la Tierra en la aproximación usual de primer orden en ω.

Ecuación maestra

$$\vec{r}\,' = \vec{r}_0\,' + \vec{v}_0\,' t - \frac{1}{2} g t^2 \hat{z}' - t^2 \vec{\Omega} \times \vec{v}_0\,' + \frac{1}{3} g t^3 \vec{\Omega} \times \hat{z}'$$

pero $\vec{\Omega} \times \hat{z}' = \omega \cos\lambda \, \hat{y}'$

$$\vec{\Omega} \times \vec{v}_0\,' = v_0 \, \omega \cos\lambda \; \hat{y}'$$

$$\vec{r}_0\,' = \vec{0}$$

$$\therefore \; \vec{r}\,' = v_0 t \, \hat{z}' - \frac{1}{2} g t^2 \hat{z}' - v_0 t^2 \omega \cos\lambda \, \hat{y}' + \frac{1}{3} g t^3 \cdot \omega \cos\lambda \; \hat{y} .$$

Entonces :

$$z' = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$y' = \left(\frac{1}{3} g t - v_0\right) \cdot t^2 \omega \cos \lambda \quad .$$

Partícula vuelve a caer :

$$z' = 0 \quad \text{en} \quad T = \frac{2 v_0}{g}$$

$$\therefore \quad y'(T) = -\frac{1}{3} v_0 \cdot \frac{4 v_0^2}{g^2} \cdot \omega \cdot \cos \lambda \quad .$$

$$\boxed{y'(T) = -\frac{4}{3} \frac{v_0^3}{g^2} \cdot \omega \cos \lambda}$$