

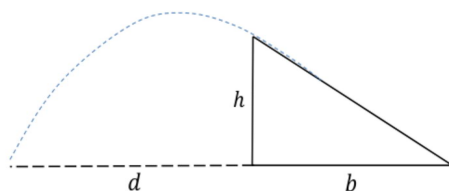
Ejercicio #3

09/04/2013

Profesora: Francisca Guzmán

Auxiliares: Felipe Bugueño, Joaquín Fariña, Carlos Matamala

P1. Desde una distancia d del borde recto de un tobogán se dispara una bengala. Si el tobogán tiene una altura h y un largo b , determinar ambas componentes de la velocidad inicial del proyectil para que éste aterrice sobre el vértice superior del tobogán de manera que su velocidad sea paralela al plano inclinado



Las siguientes ecuaciones describen el movimiento de la bengala:

$$x = v_x t \quad (1)$$

$$y = v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (2)$$

$$v_y = v_{0y} - g t \quad (3)$$

Sea t' el tiempo en el que la bengala llega al extremo superior del tobogán. En $t = t'$ se cumple:

$$d = v_x t' \quad (4)$$

$$h = v_{0y} t' - \frac{1}{2} g t'^2 \quad (5)$$

Ahora viene la parte menos evidente: la relación entre las componentes de la velocidad en el momento de llegada y la pendiente del tobogán. Se quiere que el vector de velocidad de la bengala siga la misma pendiente que el tobogán, pero ojo, se debe notar que la velocidad en el eje y , $v_y(t')$, es negativa en ese instante, de modo que se considera un signo negativo en la relación:

$$\frac{v_y(t')}{v_x} = -\frac{h}{b} \quad (6)$$

De (4) se despeja el tiempo y se sustituye en (3):

$$t' = \frac{d}{v_x} \quad (7)$$

$$v_y(t') = v_{0y} - \frac{g d}{v_x} \quad (8)$$

Por (6), se tiene:

$$v_y(t') = -\frac{hv_x}{b} \quad (9)$$

sustituyendo esto en (8), se obtiene:

$$-\frac{hv_x}{b} = v_{0y} - \frac{gd}{v_x} \quad (10)$$

Manipulando esta ecuación, se obtiene:

$$-\frac{hd}{b} = \frac{dv_{0y}}{v_x} - \frac{gd^2}{v_x^2} \quad (11)$$

Ahora, sustituyendo t' en (5):

$$h = \frac{dv_{0y}}{v_x} - \frac{1}{2} \frac{gd^2}{v_x^2} \quad (12)$$

Así, haciendo (12)-(11), se obtiene:

$$h(1 + \frac{d}{b}) = \frac{1}{2} \frac{gd^2}{v_x^2} \quad (13)$$

Despejando v_x , se obtiene:

$$v_x = d * \sqrt{\frac{gb}{2h(b+d)}} \quad (14)$$

Ahora, sustituyendo v_x en (10), se obtiene:

$$v_{0y} = (2b+d) \sqrt{\frac{gh}{2b(b+d)}} \quad (15)$$

P2. Una piedra se deja caer desde un puente de altura h . Una segunda piedra se arroja verticalmente hacia abajo T segundos más tarde. Si ambas llegan simultáneamente al río. Cuál es la velocidad inicial de la segunda piedra?

Para cada piedra, se tiene:

$$y_1 = h - \frac{1}{2}gt^2$$
$$y_2 = h - v_2(t - T) - \frac{1}{2}g(t - T)^2$$

para $t > T$

Para la primera piedra el tiempo de vuelo se obtiene imponiendo $y_1 = 0$ y se obtiene:

$$t_v = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Así, reemplazando en la ecuación de la segunda piedra, se obtiene:

$$y_2 = 0 = h - v_2(\sqrt{\frac{2h}{g}} - T) - \frac{1}{2}g(\sqrt{\frac{2h}{g}} - T)^2$$

De este modo se despeja la velocidad inicial de la segunda piedra, quedando:

$$v_2 = \frac{h - \frac{1}{2}g(\sqrt{\frac{2h}{g}} - T)^2}{\sqrt{\frac{2h}{g}} - T}$$

Dudas a cmatamala@ing.uchile.cl y/o foro. Suerte!