Pauta Control 3 - Pregunta 1

Profesora: Mónica García Ñustes
Auxiliares: Yair Zárate, Cristián Jáuregui, Juan Pablo Vargas

Fecha: 04/08/2013

Rapidez mínima:

Para que la masa pueda dar vueltas en círculos debe ocurrir que la cuerda nunca pierda tensión, si no en algún punto la masa caería en caída libre (parábola) en vez que en movimiento circular.

El punto crítico es el de mayor altura, donde impondremos que la aceleración sea igual a la de un movimiento circular (es decir hacia el centro, que está debajo). Si esta aceleración fuera mayor que lo necesario, la masa caería en caída libre, y si fuera menor la cuerda se encargaría de la masa no se fuera por la tangente.

El caso extremo es que la cuerda llegue a tensión cero, pero la masa siga su movimiento circular:

$$F = mg + T = mg$$

$$F = m \cdot a_c$$

$$v^2 = a_c \cdot R$$

$$V_m = \sqrt{a_c \cdot R} = \sqrt{F/m \cdot R} = \sqrt{g \cdot R}$$

Velocidad en todo punto:

Por conservación de la energía, podemos calcular la velocidad que tendrá la masa en cualquier parte de su trayectoria circular, ya que conocemos la rapidez en el punto máximo (es un péndulo). Cabe recordar que esta velocidad es siempre tangencial a la circunferencia.

$$E_{arriba} = \frac{m}{2} V_m^2 + mgR$$

Tomamos el potencial cero en el medio de la circunferencia por simplicidad. Desde este punto, la altura de la masa se puede expresar como $h = R \cos \theta$, entonces la velocidad de la masa la calculamos en función de este ángulo:

$$E(\theta) = \frac{m}{2} V_\theta^2 + mg(R \cos \theta) = E_{arriba}$$

$$\frac{m}{2} V_\theta^2 = \frac{m}{2} V_m^2 + mgR - mg(R \cos \theta) = \frac{m}{2} gR + mgR - mgR \cos \theta$$

$$V_\theta = \pm \sqrt{gR(3 - 2 \cos \theta)}$$

Sólo nos fijaremos en el módulo de la velocidad, por lo cual el signo no importa.

Trayectoria parabólica:

Si la cuerda se corta cuando la masa está en una posición descrita por θ , conoceremos su rapidez. Además sabiendo que la velocidad es tangencial a la trayectoria, sabremos su dirección.

En el caso en que se muestra en la figura, al soltarse, la masa tendrá velocidades:

$$\boxed{V_x = V_\theta \cdot \cos \theta}$$

$$\boxed{V_y = V_\theta \cdot \sin \theta}$$

Donde V_θ ya lo conocemos, y aparece el ángulo θ pues coincide con la dirección de la velocidad.

Una forma de describir el movimiento que se pide en el problema, es imponer que en un mismo tiempo T se cumplan dos condiciones:

- La masa recorre la distancia horizontal hasta el centro del círculo: $d = R \cdot \sin \theta$

- La velocidad vertical de la masa se hace nula: $V_{yf} = 0$

La primera condición implica:

$$V_x = \frac{d}{T} \quad \rightarrow \quad V_\theta \cdot \cos \theta = \frac{R \cdot \sin \theta}{T} \quad \rightarrow \quad T = \frac{R \cdot \sin \theta}{V_\theta \cdot \cos \theta}$$

La segunda condición implica:

$$V_{yf} = V_y - g \cdot T \quad \rightarrow \quad 0 = V_\theta \cdot \sin \theta - g \cdot T \quad \rightarrow \quad T = \frac{V_\theta \cdot \sin \theta}{g}$$

Igualando ambos tiempos se llega finalmente a que los ángulos θ que cumplen la condición son:

$$\frac{R \cdot \sin \theta}{V_\theta \cdot \cos \theta} = \frac{V_\theta \cdot \sin \theta}{g} \quad \rightarrow \quad V_\theta^2 \cdot \cos \theta = gR$$

$$gR(3 - 2 \cos \theta) \cdot \cos \theta = gR \quad \rightarrow \quad 2 \cos^2 \theta - 3 \cos \theta + 1 = 0$$

$$\cos \theta = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4}$$

$$\theta_+ = \arccos(1) = 0 \text{ [rad]} = 0^\circ$$

$$\theta_- = \arccos(1/2) = \frac{\pi}{3} \text{ [rad]} = 60^\circ$$

El primer resultado es evidente, pues la masa cumple con las condiciones sin siquiera recorrer una trayectoria. El segundo resultado es más interesante. De todas formas sólo se pedía llegar hasta la expresión para $\cos \theta$.