Pauta Control 3 – Pregunta 3

Profesora: Mónica García Ñustes Fecha: 01/08/2013
Auxiliares: Yair Zárate, Cristián Jáuregui, Juan Pablo Vargas

---

Caída:
El péndulo parte en reposo una altura L, y conserva su energía hasta antes de impactar al bloque:

$$E_{arriba} = E_{abajo} \qquad \rightarrow \qquad mgL = \frac{m}{2}{v_0}^2 \qquad \rightarrow \qquad v_0 = \sqrt{2gL}$$

¡Durante la caída el momentum <u>NO SE CONSERVA</u>, ya que actúan la gravedad y la tensión!

El péndulo impacta al bloque de masa Mdesconocida. Debemos calcular qué altura alcanza en un choque elástico y en un choque perfectamente inelástico.

Choque elástico:
Se conservará el momentum y la energía justo antes y después del choque.

$$p_{antes} = p_{después} \qquad \rightarrow \qquad m \cdot v_0 + 0 = m \cdot v_E + M \cdot v_B$$

$$E_{antes} = E_{después} \qquad \rightarrow \qquad \frac{m}{2}{v_0}^2 + 0 = \frac{m}{2}{v_E}^2 + \frac{M}{2}{v_B}^2$$

Necesitamos despejar la rapidez v_E del péndulo después del choque, para luego calcular la altura que alcanzará. Despejaremos v_E de la primera ecuación para reemplazarla en la segunda:

$$v_E = \frac{m \cdot v_0 - M \cdot v_B}{m} = v_0 - \frac{M}{m} v_B$$

$$m{v_0}^2 = m{v_E}^2 + M{v_B}^2 \qquad \rightarrow \qquad m{v_0}^2 = m\left(v_0 - \frac{M}{m}v_B\right)^2 + M{v_B}^2$$

$$m{v_0}^2 = m\left({v_0}^2 - 2\frac{M}{m}v_0 v_B + \frac{M^2}{m^2}{v_B}^2\right) + M{v_B}^2$$

$$m{v_0}^2 = m{v_0}^2 - 2Mv_0v_B + \frac{M^2}{m}{v_B}^2 + M{v_B}^2$$

Se cancelan dos términos similares, luego dividimos por M y quedan dos soluciones para v_B:

$$0 = -2mMv_0v_B + M^2{v_B}^2 + mM{v_B}^2$$

$$v_B \cdot [(M+m)v_B - 2mv_0] = 0$$

La solución $v_B = 0$ ocurre cuando no hay colisión, así que la desechamos. La otra solución es:

$$(M+m)v_B - 2mv_0 = 0 \qquad \rightarrow \qquad v_B = \frac{2mv_0}{m+M}$$

Con esta solución, tenemos que la rapidez del péndulo tras el choque elástico es:

$$v_E = v_0 - \frac{M}{m}v_B = v_0 - \frac{M}{m}\cdot\frac{2mv_0}{M+m} = \frac{v_0\cdot(m+M) - 2Mv_0}{m+M} = v_0\cdot\frac{m-M}{m+M}$$

Si tomamos la otra solución, evidentemente llegamos a que $v_E = v_0$ (pues no hay choque).

Choque inelástico:
Se conservará el momentum, y las masas quedarán unidas (misma velocidad).
¡La energía NO SE CONSERVA en el choque inelástico! Esto se debe a que los cuerpos se deforman.

$$p_{antes} = p_{después} \qquad \rightarrow \qquad m\cdot v_0 + 0 = m\cdot v_I + M\cdot v_I$$

Entonces la rapidez del péndulo después de la colisión inelástica es:

$$v_I = \frac{m\cdot v_0}{m+M}$$

Altura alcanzada:
En ambos casos, la altura alcanzada por el péndulo se calcula utilizando la conservación de la energía DESPUÉS del choque (no antes, por el caso del choque inelástico).

En cada caso se tiene que la altura alcanzada es:

$$E_E = E_{hE} \qquad \rightarrow \qquad \frac{m}{2}{v_E}^2 = mgh_E \qquad \rightarrow \qquad h_E = \frac{{v_E}^2}{2g}$$

$$E_I = E_{hI} \qquad \rightarrow \qquad \frac{(m+M)}{2}{v_I}^2 = (m+M)gh_I \qquad \rightarrow \qquad h_I = \frac{{v_I}^2}{2g}$$

Como se puede ver, la altura alcanzada depende tan sólo de la rapidez del péndulo, por lo cual podía ahorrarse este cálculo.
De todas formas hay considerar que esa altura se puede alcanzar tanto yendo hacia la derecha o hacia la izquierda con una misma rapidez, así que la condición para que en ambos choques se alcance una misma altura pueden ser dos: $h_E = h_I$ ó $v_E = \pm v_I$

En ambos casos se llega a los mismos resultados para M:

$$h_E = h_I \qquad \rightarrow \qquad \frac{{v_E}^2}{2g} = \frac{{v_I}^2}{2g} \qquad \rightarrow \qquad {v_0}^2\left(\frac{m-M}{m+M}\right)^2 = {v_0}^2\frac{m^2}{(m+M)^2}$$

$$(m-M)^2 = m^2 \qquad \rightarrow \qquad m^2 - 2mM + M^2 = m^2 \qquad \rightarrow \qquad M(M-2m) = 0$$

Es decir la masa del bloque B puede ser tanto $M = 0$ (no hay colisión) como $M = 2m$.

Puntaje:

- ***1.0 puntos***: Calcular la rapidez $v_0 = \sqrt{2gL}$, o explicar que no es necesaria para el resultado pedido.

- ***1.0 puntos:*** Calcular la rapidez $v_E = v_0 \cdot \frac{m-M}{m+M}$ resultante del choque elástico.

- ***1.0 puntos:*** Calcular la rapidez $v_I = v_0 \cdot \frac{m}{m+M}$ resultante del choque inelástico.

- ***2.0 puntos:*** Calcular las alturas h_E y h_I alcanzadas, o argumentar que no era necesario obtenerlas para llegar al resultado pedido.

- ***1.0 puntos:*** Calcular los dos posibles valores de M que cumplían con lo pedido.

Errores recurrentes:

Algunos errores que se observaron con frecuencia durante la corrección:

- **Igualar el momentum <u>antes de caer</u> con el momentum <u>después del choque</u>.**
  Esto es incorrecto, pues durante la caída actúan la gravedad y la tensión, que son fuerzas externas y cambian el momentum.

- **Igualar la energía antes y después de la colisión inelástica.**
  La definición de colisión inelástica es aquella en que no se conserva la energía. Esto sucede porque los objetos se deforman, que es una forma distinta de almacenar energía.

- **Olvidar que en la colisión inelástica ambas masas quedan unidas.**
  Al calcular la energía del sistema cuando el péndulo estaba a una altura h, olvidaron que el bloque también estaba a esa altura, y no pusieron su energía potencial.

- **Imponer que las rapideces fueran iguales, sin considerar el posible cambio de signo.**
  Como ya se dijo, en el choque elástico el péndulo pudo haber rebotado hacia atrás, por lo cual las rapideces son iguales pero de signo contrario, alcanzando la misma altura h.