Pauta Auxiliar 7 – Pregunta 3

Profesora: Mónica García-Ñustes
Auxiliares: Yair Zárate, Cristián Jáuregui, Juan Pablo Vargas

Fecha: 10/04/2013

Pregunta 3

El enunciado no deja muy claro si la masa se desprende por que va muy rápido (la normal se anula y se suelta, yéndose por la tangente) o por que el peso le gana al roce (comienza a deslizar y cae).

Pero dice que no se desliza, por lo cual tomaremos el primer caso (la normal se anula).

Si le llamamos $\boldsymbol{\alpha}$ al ángulo que se mide desde la vertical hacia abajo, entonces del *DCL* obtenemos:

$$F_n = N - mg \cdot \cos\alpha$$

$$F_t = -R + mg \cdot \sin\alpha$$

Donde el eje $\boldsymbol{n}$ y el eje $\boldsymbol{t}$ son perpendiculares y tangenciales a la circunferencia respectivamente.

Como la masa describe una circunferencia a $\boldsymbol{v_0}$ constante (hasta que se desprenda), debe tener una aceleración centrípeta, que está dirigida en el eje $\boldsymbol{n}$.

$$a_c = \frac{v_0^2}{R} \qquad \rightarrow \qquad a = -\frac{v_0^2}{R} \cdot \hat{n}$$

Se tiene entonces:

$$F_n = -m \cdot a = N - mg \cdot \cos\alpha$$

$$F_t = m \cdot 0 = -R + mg \cdot \sin\alpha$$

La caja se desprende cuando la normal se anula:

$$-m \cdot \frac{v_0^2}{R} = 0 - mg \cdot \cos\alpha$$

$$\frac{v_0^2}{R} = g \cdot \cos\alpha$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{v_0^2}{gR}\right)$$

Ahora tenemos que la masa caerá en un movimiento parabólico, comenzando a cierta altura y dirección que dependen del $\boldsymbol{\alpha}$ calculado, y con velocidad inicial $\boldsymbol{v_0}$.

Poniendo el origen el centro del círculo, las condiciones iniciales son:

$$x_0 = R \cdot \sin\alpha \qquad\qquad v_{x0} = v_0 \cdot \cos\alpha$$

$$y_0 = R \cdot \cos\alpha \qquad\qquad v_{y0} = -v_0 \cdot \sin\alpha$$

Utilizando las fórmulas de la cinemática:

$$x_f = x_0 + v_{x0} \cdot T = R \cdot \sin\alpha + v_0 \cdot \cos\alpha \cdot T$$

$$y_f = -R = y_0 + v_{y0} \cdot T - \frac{g}{2} \cdot T^2 = R \cdot \cos\alpha - v_0 \cdot \sin\alpha \cdot T - \frac{g}{2} \cdot T^2$$

$$\frac{g}{2} \cdot T^2 + v_0 \cdot \sin\alpha \cdot T + R \cdot (1 - \cos\alpha) = 0$$

Reemplazamos $\alpha = \arccos\left(\frac{v_0^2}{gR}\right) = \arccos(z)$.
Además usamos las identidades $\boxed{\cos(\arccos(z)) = z}$ y $\boxed{\sin(\arccos(z)) = \sqrt{1 - z^2}}$:

$$\frac{g}{2} \cdot T^2 + v_0 \cdot \sqrt{1 - z^2} \cdot T + R \cdot (1 - z) = 0$$

$$\frac{g}{2} \cdot T^2 + \sqrt{{v_0}^2 - \frac{v_0^6}{g^2 R^2}} \cdot T + R \cdot \left(1 - \frac{v_0^2}{gR}\right) = 0$$

Aquí se puede calcular el tiempo T en que la masa cae, usando la solución <u>positiva</u> de:

$$T = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}$$

Al reemplazar T en la ecuación de movimiento para el eje x se obtendrá lo que nos piden, pero es un desarrollo algebraico muy extenso. Queda de tarea.