Guía – Movimiento Armónico Simple

Profesora: Mónica García-Ñustes
Auxiliares: Yair Zárate, Cristián Jáuregui, Juan Pablo Vargas

Fecha: 10/05/2013

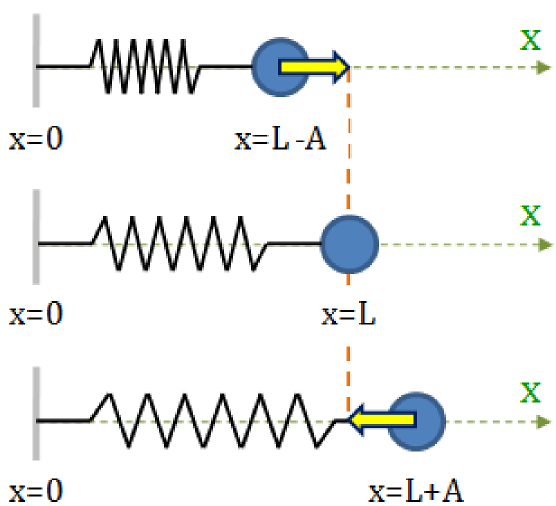
El Resorte Lineal

Un resorte es una pieza que en sus extremos ejerce una fuerza que depende de su deformación. Se considera que un resorte ideal tiene las siguientes características:

- Un largo natural $\boldsymbol{L}$.
- Una constante de rigidez $\boldsymbol{k}$.
- Masa despreciable.
- En ambos extremos ejerce una fuerza igual a $\boldsymbol{F = -k\Delta x}$.
- Esta fuerza es transversal a la dirección del resorte (no perpendicular).

Es decir, si el resorte está comprimido buscará estirarse, y si está estirado buscara comprimirse, hasta llegar a su largo natural.

Como la fuerza es proporcional a la deformación, se le llama resorte lineal. Aquí un ejemplo:



$$\boldsymbol{F = -k(x - L) = -k[(L - A) - L\,]}$$
$$\boldsymbol{F = -k(-A) = +kA}$$

$$\boldsymbol{F = -k(x - L) = -k[(L) - L]}$$
$$\boldsymbol{F = -k(0) = 0}$$

$$\boldsymbol{F = -k(x - L) = -k[(L + A) - L]}$$
$$\boldsymbol{F = -k(+A) = -kA}$$

Si ponemos $\boldsymbol{x = 0}$ en el punto de equilibrio, la ecuación queda más simple: $\boldsymbol{F = -kx}$

Hay que tener claro que este es un modelo, ya que no necesariamente la fuerza de los resortes cumple esta regla. Además los resortes tienen masa, una rigidez que puede variar, etc.

Movimiento Periódico

Si uno comprime o estira un resorte y luego lo suelta, este va a acelerar la masa hasta llegar al punto de equilibrio, pero al tener inercia, la masa seguirá avanzando hasta llegar hasta el otro lado, donde se devolverá y pasará nuevamente por el punto de equilibrio.

Si despreciamos el roce, obtendremos un movimiento oscilatorio que nunca se detiene, y que posee una frecuencia fija.
Dado el modelo de resorte lineal, se puede demostrar (no lo haremos) que el movimiento de la masa obedece una función sinusoidal (seno o coseno) dependiente del tiempo. Por ejemplo:

$$\boldsymbol{x(t) = \cos(t)}$$

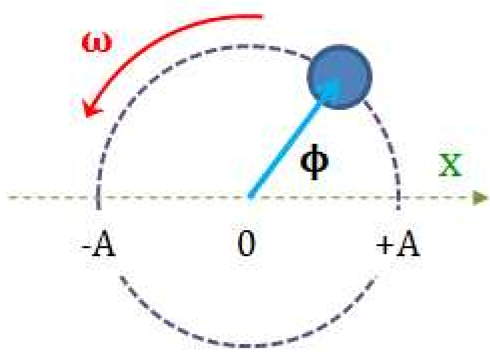
Pero esta función es muy restringida (de hecho sólo varía entre $x = -1$ y $x = +1$). La generalizaremos a algo más práctico añadiendo algunas constantes:

$$\boldsymbol{x(t) = L + A\ \cos(\omega t + \varphi_0)}$$

Donde $\boldsymbol{A}$ corresponde a la amplitud del movimiento (punto máximo y mínimo que alcanza), $\boldsymbol{\omega}$ corresponde a la frecuencia y $\boldsymbol{\varphi_0}$ es un desfase del cual ya hablaremos.
Además añadimos $\boldsymbol{L}$ en el caso de que nuestras coordenadas estén en el extremo fijo del resorte, aunque es más cómodo usar el punto de equilibrio, en cuyo caso el término $\boldsymbol{L}$ no aparece.

Analogía con el Movimiento Circular Uniforme

Se suele hacer una analogía muy útil entre este movimiento y el de una masa que gira con velocidad angular constante:



Si esta masa gira a un radio $\boldsymbol{R = A}$ con una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$, entonces la proyección de este movimiento en el eje $\hat{x}$ corresponde a $\boldsymbol{x = A\cos(\varphi)}$. Además de la definición de velocidad angular sabemos que $\boldsymbol{\omega = \varphi/t}$, entonces: $\boldsymbol{x = A\cos(\omega t)}$.

Como vemos, es lo mismo que en el caso del resorte. La amplitud de la oscilación corresponde en este caso al radio de la circunferencia, y la frecuencia $\boldsymbol{\omega}$ equivale a la velocidad angular.
Además, estudiando el modelo del resorte, se puede demostrar (no lo haremos) que $\boldsymbol{\omega = \sqrt{k/m}}$.

Tenemos entonces la ecuación de la posición de la masa unida al resorte, en función del tiempo:

$$\boldsymbol{x(t) = A\ \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)}$$

La velocidad de esta masa se puede calcular proyectando la velocidad tangencial que existe en la analogía del movimiento circular, o se puede obtener derivando $\boldsymbol{x(t)}$. El resultado es:

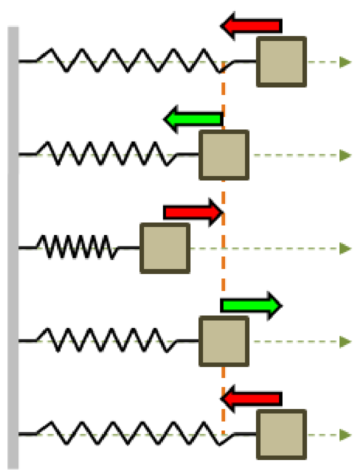
$$v(t) = -A\,\omega \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

Nótese que sale un término ω. Si no fuese así, la velocidad tendría unidades de longitud, lo cual es evidentemente incorrecto.

Por último, la aceleración de la masa ES VARIABLE (no podemos usar la cinemática que conocemos), y se obtiene al proyectar la aceleración centrípeta del movimiento circunferencial descrito. También se puede calcular derivando $v(t)$, y en ambos casos el resultado es:

$$a(t) = -A\,\omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

En estas tres ecuaciones el "ángulo" al interior del seno y el coseno son los mismos y dependen del tiempo. Esto nos dice que hay una relación periódica que se cumple para la posición, velocidad y aceleración de la masa. Veamos todo esto en un esquema cualitativo:



Posición	Velocidad	Aceleración	"Ángulo"
+Máxima	0	-Máxima	$\Phi=0$
0	-Máxima	0	$\Phi=\pi/2$
-Máxima	0	+Máxima	$\Phi=\pi$
0	+Máxima	0	$\Phi=3\pi/2$
+Máxima	0	-Máxima	$\Phi=2\pi$

Donde "+Máxima" y "-Máxima" se refiere a la dirección en que apunta, y coincide con los máximos y mínimos de las funciones trigonométricas correspondientes.

Ver animación: http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/1b/Fasorxva.gif

Si queremos fijar que en $t = 0$ la masa se encuentra en $x = +A$, lo que debemos hacer es fijar:

$$x(t = 0) = A\ \cos(\omega \cdot 0 + \varphi_0)$$

$$+A = A\ \cos(\varphi_0)$$

Esto sólo se cumple si $\varphi_0 = N\pi$, y por simplicidad nos conviene usar $\varphi_0 = 0$.
En otros casos querremos que $x(t = 0)$ tenga otro valor, y tendremos que determinar un valor conveniente para φ_0 de la misma manera.

Conclusiones y Aclaraciones

Es interesante notar que la frecuencia (y por lo tanto también el período) de la oscilación no depende de la amplitud. Es decir, si tenemos una masa unida a un resorte, la podemos soltar en $\boldsymbol{x = A}$ o en $\boldsymbol{x = 5A}$ y tardará el mismo tiempo en completar cada ciclo.

Esta frecuencia depende de la masa que se mueve armónicamente. Si ponemos una masa más pesada, la frecuencia disminuye según la regla $\boldsymbol{\omega = \sqrt{k/m}}$, pues aumenta la inercia.

El valor $\boldsymbol{\omega}$ se le puede llamar “velocidad angular del resorte” debido a la analogía que hicimos. Esto no significa que el resorte gire, sino que sirve para relacionar ambos movimientos.

El tiempo de oscilación del resorte se completa cuando $\boldsymbol{\omega \cdot t}$ aumenta en $\boldsymbol{2\pi}$ (pues ese es el período de las funciones seno y coseno), es decir el período de una oscilación es $\boldsymbol{T = 2\pi/\omega}$.

A veces para describir la posición de la masa, se usa la función seno en vez que coseno. El resultado es exactamente el mismo, pero se debe tener en cuenta que las expresiones de le velocidad y aceleración también cambian, y el ángulo de desfase $\boldsymbol{\varphi_0}$ no será el mismo.
Como recomendación es mejor aprender una sola forma, y calcular el ángulo de desfase para cada problema al que se enfrenten.

Otro punto que no debe olvidarse es que el resorte ejerce fuerza en AMBOS extremos, pero como hemos visto los casos en que está fijo a una muralla, no nos hemos fijado que en el lado izquierdo también ejerce una fuerza, la cual es igual y en sentido opuesto a la que ejerce en el lado derecho.

Entonces, si tenemos un resorte con masas en ambos extremos, la fuerza que sienta cada masa debido al resorte será igual, pero en dirección contraria (el resorte se estira hacia ambos lados o contrae en ambos extremos).

Si tenemos dos resortes unidos, es recomendable hacer un *DCL* del punto donde se unen, considerando una masa hipotética con $\boldsymbol{m = 0}$. Es incorrecto sumar los coeficientes $\boldsymbol{k}$.

Si les quedan más dudas pueden hacerlas por el foro de U-Cursos, ¡gracias! =)

Resumen General

$$\boldsymbol{F = -k\Delta x = -k(x - L)}$$

$$\boldsymbol{E_{res} = \frac{k}{2}(\Delta x)^2}$$

$$\boldsymbol{x(t) = A \cdot cos(\omega \cdot t + \varphi_0)}$$

$$\boldsymbol{v(t) = -A\,\omega \cdot sin(\omega \cdot t + \varphi_0)}$$

$$\boldsymbol{a(t) = -A\,\omega^2 \cdot cos(\omega \cdot t + \varphi_0)}$$

$$\boldsymbol{\omega = \sqrt{k/m}} \qquad\qquad \boldsymbol{T = 2\pi/\omega}$$