Pauta Ejercicio 02 – Introducción a la Física Newtoniana

Profesora: Mónica García-Ñustes
Auxiliares: Yair Zárate, Cristián Jáuregui, Juan Pablo Vargas
Fecha: 17/04/2013

Pregunta 1

a) Para responder este problema, primero tenemos que entender claramente la situación:

- Los jugadores se encuentran a una distancia $\boldsymbol{d_1}$ y $\boldsymbol{d_2}$ del balón respectivamente.
- El primer jugador parte $\mathbf{0,5}$ segundos antes que el segundo.
- Queremos calcular la velocidad $\boldsymbol{u_2}$ para que el segundo jugador llegue al mismo tiempo que el primer jugador (cualquier u_2 mayor que ese cumplirá con la condición).

Este es entonces un caso de movimiento rectilíneo uniforme, pero donde hay que tener cuidado de que las expresiones que usemos correspondan a lo que nos piden.

Para simplificar el problema digamos que el primer jugador comienza a correr en $\boldsymbol{t = 0}$. ¿Cuándo llegará a la pelota?

$$\boldsymbol{u_1 = \frac{d_1}{T}} \qquad \rightarrow \qquad \boldsymbol{T = \frac{d_1}{u_1}}$$

De la definición de velocidad es simple calcular el tiempo $\boldsymbol{T}$ en función de nuestros datos.
¿Pero cuánto tardará el segundo jugador en llegar a la pelota? Aquí es fácil equivocarse:

Desde que comienza a correr, el segundo jugador tardará $\boldsymbol{t_2 = d_2/u_2}$ en llegar al balón, pero a eso hay que agregarle el tiempo de reacción. Es decir:

$$\boldsymbol{t_2 + 0,5[s] = T}$$

Con lo que imponemos que el jugador 1 se tarde lo mismo en llegar al balón que el jugador 2, siendo que este último partió medio segundo más tarde.
Reemplazando los tiempos:

$$\boldsymbol{\frac{d_2}{u_2} + 0,5[s] = \frac{d_1}{u_1}}$$

$$\boldsymbol{\frac{d_2}{u_2} = \frac{d_1}{u_1} - \frac{1}{2}}$$

$$\boldsymbol{\frac{1}{u_2} = \frac{1}{d_2}\left(\frac{2d_1 - u_1}{2u_1}\right)}$$

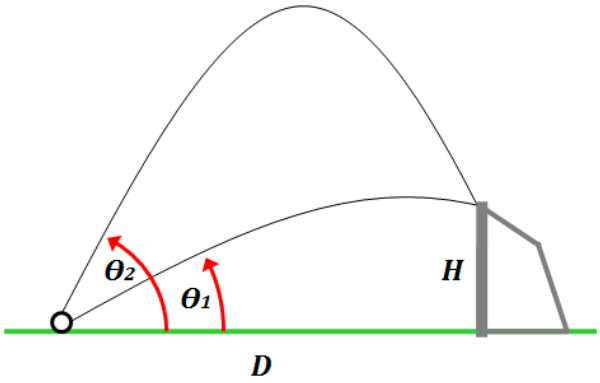
$$\boldsymbol{u_2 = d_2\left(\frac{2u_1}{2d_1 - u_1}\right)}$$

Con lo cual tenemos una expresión para la rapidez mínima del segundo jugador, que sólo depende de los datos del problema.

b) El primer jugador (el de la izquierda) llega al balón y lo patea con el triple de su velocidad:

$$V_0 = 3\,u_1$$

Tenemos que calcular para qué ángulos se cumple que la pelota golpea en el travesaño, el cual está a una distancia D y altura H del punto de donde parte.



El truco que nunca falla es descomponer el movimiento en nuestros dos ejes, e igualar los tiempos que el proyectil tarda en recorrer cada distancia.

La velocidad inicial la descompondremos como: $V_x = V_0 \cos\theta$ $V_y = V_0 \sin\theta$

En el eje horizontal no hay aceleración, por lo tanto el tiempo que tarda el balón en recorrer la distancia D será:

$$T = \frac{D}{V_x} = \frac{D}{V_0 \cos\theta}$$

En el eje vertical sí hay aceleración, por lo cual la altura de la pelota en un tiempo t es:

$$y = 0 + V_y \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$$

Imponiendo que el balón llegue a una altura H en el tiempo T que calculamos, se obtiene:

$$H = V_0 \sin\theta \cdot T - \frac{g}{2} \cdot T^2$$

$$H = \frac{D \cdot V_0 \sin\theta}{V_0 \cos\theta} - \frac{g}{2} \cdot \frac{D^2}{{V_0}^2 \cos^2\theta}$$

Por si acaso $\cos^2\theta$ es sólo una forma abreviada de escribir $(\cos\theta)^2$. Tenemos entonces:

$$H = D \tan\theta - \frac{g}{2} \cdot \frac{D^2}{{V_0}^2} \sec^2\theta$$

El punto crítico ocurre aquí, ya que de no dar el siguiente paso, despejar una expresión para el ángulo era imposible. La identidad trigonométrica que utilizaremos es:

$$\boldsymbol{\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta}$$

La cual se deduce a partir de $\boxed{\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1}$ al dividir por $cos^2\,\theta$. Sigamos:

$$\boldsymbol{H = D\tan\theta - \frac{g}{2}\cdot\frac{D^2}{{V_0}^2}(1 + \tan^2\theta)}$$

$$\boldsymbol{\frac{gD^2}{2{V_0}^2}\tan^2\theta - D\tan\theta + \frac{gD^2}{2{V_0}^2} + H = 0}$$

$$\boldsymbol{\tan^2\theta + \left(\frac{-2{V_0}^2}{gD}\right)\tan\theta + \left(1 + \frac{2{V_0}^2}{gD^2}H\right) = 0}$$

Aquí obtuvimos una ecuación cuadrática para $\tan\theta$, es decir, una ecuación del tipo:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Que tiene dos posibles soluciones, que son las siguientes (APRÉNDANSELA):

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

En nuestro caso el x es $\tan\theta$, pero no es necesario hacer el reemplazo en esta parte, ya que sólo se nos pide llegar hasta esa expresión.

c) Ahora nos piden reemplazar ciertos valores en la expresión encontrada, para así hallar los dos ángulos posibles. Es más cómodo reemplazar los valores en la expresión marcada con (★):

$$\boldsymbol{tan^2\theta - \left(\frac{2\cdot(3\cdot5)^2}{10\cdot10}\right)tan\,\theta + \left(1 + \frac{2\cdot(3\cdot5)^2}{10\cdot10^2}\cdot\frac{5}{2}\right) = 0}$$

$$\boldsymbol{tan^2\theta - \left(\frac{2\cdot225}{100}\right)tan\,\theta + \left(1 + \frac{450}{1000}\cdot\frac{5}{2}\right) = 0}$$

$$\boldsymbol{tan^2\theta - \left(\frac{9}{2}\right)tan\,\theta + \left(\frac{17}{8}\right) = 0}$$

Ahora sí utilizamos las soluciones de esta ecuación cuadrática, resultando:

$$\boldsymbol{\tan\theta = \frac{+\frac{9}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 - 4\cdot1\cdot\frac{17}{8}}}{2\cdot1}}$$

$$\boldsymbol{\tan\theta = \frac{\frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4} - \frac{17}{2}}}{2}}$$

$$\tan\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81-34}{4}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{47}\right) = \frac{1}{4}\left(9 \pm \sqrt{47}\right)$$

Usando las aproximaciones que nos daban, calculamos el valor de ambos ángulos.
OJO: para despejar el ángulo hay que aplicar la operación inversa de $\tan(x)$, que es $\arctan(x)$.

$$\tan\theta_1 = \frac{1}{4}\left(9 - \sqrt{47}\right) \approx \frac{1}{4}(9-7) = \frac{2}{4} = 0,5 \qquad \rightarrow \qquad \theta_1 = arctan(0,5) \approx 0,5[rad]$$

$$\tan\theta_2 = \frac{1}{4}\left(9 + \sqrt{47}\right) \approx \frac{1}{4}(9+7) = \frac{16}{4} = 4 \qquad \rightarrow \qquad \theta_2 = arctan(4) \approx 1,3[rad]$$

d) Ahora el problema cambia ligeramente. Nos da lo mismo si la pelota va o no al palo, pues lo que tenemos es la velocidad V_0 con que sale la pelota, y dos ángulos posibles: $30°$ y $60°$.

Procediendo exactamente igual que en la parte (b), separaremos el movimiento en dos ejes y comenzaremos con el horizontal. La única diferencia es que esta vez el balón avanza d_2.

El tiempo que tarda el balón en recorrer esa distancia es:

$$T = \frac{d_2}{V_x} = \frac{d_2}{V_0 \cos\theta}$$

Por lo cual obtendremos un valor distinto de T para cada uno de los ángulos.
Sabiendo que $\sin(30°) = \cos(60°) = 1/2$, y que $\sin(60°) = \cos(30°) = \sqrt{3}/2$, tenemos que:

$$T_1 = \frac{6}{3\cdot 5}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{4}{5\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{15} \approx 0,46[s]$$

$$T_2 = \frac{6}{3\cdot 5}\cdot\frac{2}{1} = \frac{4}{5} = 0,8[s]$$

La altura que alcanza el balón en ese tiempo es:

$$y = V_0 \sin\theta \cdot T - \frac{g}{2}\cdot T^2$$

Entonces obtendremos un valor distinto de y para cada uno de los tiempos.

$$y_1 = (3\cdot 5)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4\sqrt{3}}{15} - \frac{10}{2}\cdot\left(\frac{4\sqrt{3}}{15}\right)^2 = 2\sqrt{3} - 5\cdot\frac{48}{225} = \frac{30\sqrt{3}-16}{15}[m]$$

$$y_2 = (3\cdot 5)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{4}{5} - \frac{10}{2}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2 = 6\sqrt{3} - 5\cdot\frac{16}{25} = \frac{30\sqrt{3}-16}{5}[m]$$

Ahora bien, el enunciado nos dice que el segundo jugador salta al mismo tiempo que el primero patea el balón, y que justo logra cabecearlo. Esto quiere decir que en el momento en que el balón haya recorrido d_2 (y tenga una altura y_1 o y_2), la cabeza del jugador tiene que estar a esa misma altura (nótese que la cabeza comienza a una altura $\boldsymbol{y_0 = \sqrt{3}\ [m]}$). Por lo tanto tenemos:

$$\boldsymbol{y = y_0 + v \cdot T - \frac{g}{2} \cdot T^2}$$

Para cada ángulo tenemos una altura y un tiempo, que al reemplazarlos nos da una velocidad $\boldsymbol{v}$:

$$\boldsymbol{v \cdot T = y - y_0 + \frac{g}{2} \cdot T^2}$$

$$\boldsymbol{v = \frac{y - y_0}{T} + \frac{g}{2} \cdot T}$$

Podemos entonces calcular la velocidad necesaria en cada uno de los casos:

$$\boldsymbol{v_1 = \frac{\left(\frac{30\sqrt{3} - 16}{15}\right) - \sqrt{3}}{\left(\frac{4\sqrt{3}}{15}\right)} + \frac{10}{2} \cdot \left(\frac{4\sqrt{3}}{15}\right) = \left(\frac{15}{4\sqrt{3}}\right)\left[\frac{30\sqrt{3} - 16 - 15\sqrt{3}}{15}\right] + 5 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{15}}$$

$$\boldsymbol{v_1 = \left[\frac{15\sqrt{3} - 16}{4\sqrt{3}}\right] + \frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{45\sqrt{3} - 48 + 48}{12\sqrt{3}} = \frac{45\sqrt{3}}{12\sqrt{3}} = \frac{15}{4} = 3,75\left[\frac{m}{s}\right]}$$

$$\boldsymbol{v_2 = \frac{\left(\frac{30\sqrt{3} - 16}{5}\right) - \sqrt{3}}{\left(\frac{4}{5}\right)} + \frac{10}{2} \cdot \left(\frac{4}{5}\right) = \left(\frac{5}{4}\right)\left[\frac{30\sqrt{3} - 16 - 5\sqrt{3}}{5}\right] + 5 \cdot \frac{4}{5}}$$

$$\boldsymbol{v_2 = \left[\frac{25\sqrt{3} - 16}{4}\right] + 4 = \frac{25\sqrt{3} - 16 + 16}{4} = \frac{25\sqrt{3}}{4} \approx 10,8\left[\frac{m}{s}\right]}$$

Hemos calculado la velocidad del salto del jugador en los dos posibles casos.

El enunciado dice que una de estas soluciones no es verdadera, en el sentido de que no es realista... Es decir, es bastante difícil saltar a cabecear a $10{,}8\ [m/s]$ para alcanzar una pelota que pasa $5{,}5\ [m]$ por encima de uno, por lo cual la solución para $\theta_2 \approx 60°$ es bastante fantástica. xD