Pauta Auxiliar 01 – Introducción a la Física Newtoniana

Profesora: Mónica García-Ñustes Fecha: 27/03/2013
Auxiliares: Yair Zárate, Cristián Jáuregui, Juan Pablo Vargas

Pregunta 1: Análisis Dimensional

Para resolver este ejercicio, primero tenemos que tener bien claras las *unidades* que tienen las constantes $\boldsymbol{G}$ y $\boldsymbol{H_0}$. Para ello, como no necesariamente las sabemos de memoria, podemos utilizar las expresiones que se nos han dado.

Para la constante de Hubble tenemos $\boldsymbol{v = H_0 d}$, donde $\boldsymbol{v}$ es una velocidad y $\boldsymbol{d}$ una distancia (eso te lo tienen que decir, porque no es obvio).
Si despejamos la constante nos queda $\boldsymbol{H_0 = v/d}$, cuyas unidades son de $\left[\frac{m/s}{m}\right] = \left[\frac{1}{s}\right]$.
En verdad da lo mismo si usaron segundos, horas u otro sistema de medida, pero lo que tiene que quedar claro es que $\boldsymbol{H_0}$ tiene unidades de "1 partido en tiempo" (que es una frecuencia).

Haciendo un análisis del mismo tipo para $\boldsymbol{G}$, al despejar obtenemos $\boldsymbol{G = \frac{F}{mM} r^2}$, lo cual tiene unidades de $\left[kg \cdot \frac{m}{s^2} \cdot \frac{1}{kg^2} \cdot m^2\right] = \left[\frac{m^3}{kg \cdot s^2}\right]$, (recordando que $\boldsymbol{F = m \cdot a}$).

Finalmente tenemos la *densidad de masa* (llamada $\boldsymbol{\rho_m}$), que corresponde a <u>masa sobre volumen</u>, es decir tiene unidades de $[kg/m^3]$.

De alguna forma tenemos que ordenar estos tres valores, para que las unidades se cancelen y resulte un parámetro "adimensional". Esto puede ser por prueba y error, aunque en este caso lo más notorio es que las unidades de $\boldsymbol{G}$ y de $\boldsymbol{\rho_m}$ son casi opuestas, por lo cual al multiplicarlas se cancelan entre sí, salvo que queda $\left[1/s^2\right]$, y para que desaparezca podemos dividir por $\boldsymbol{{H_0}^2}$.

De esta forma tenemos que nuestro parámetro adimensional puede ser escrito como:

$$\boldsymbol{\Omega_m \propto \frac{G \cdot \rho_m}{{H_0}^2}}$$

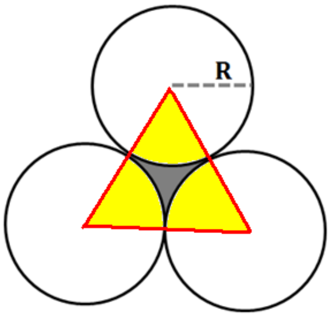
Se usa el símbolo de proporcionalidad, ya que se podría multiplicar cualquier número, y las unidades seguirían siendo correctas. El verdadero valor de este parámetro es:

$$\boldsymbol{\Omega_m = \frac{3\pi \cdot G \cdot \rho_m}{8 \cdot {H_0}^2}}$$

Pero eso no había de dónde saberlo, así que sólo se debía que llegar a la proporción.

Pregunta 2: Geometría

Resolver esta pregunta requiere que a uno se le ocurra un truco muy útil, ya que de otra forma, calcular una superficie tan “fea” parece imposible.
El truco es que al unir los centros de las circunferencias con líneas rectas, se forma un triángulo equilátero, y además tres secciones de circunferencia cuya área sabemos calcular.



Los lados del triángulo equilátero miden $\mathbf{2R}$, por lo tanto su área es:

$$A_T = \frac{\sqrt{3}}{4}(2R)^2 = R^2\sqrt{3}$$

Por el otro lado, cada una de las secciones circulares equivale a $\mathbf{1/6}$ del total de su circunferencia, ya que los ángulos interiores del triángulo miden $\mathbf{60° = \pi/3}$. Entonces el área de <u>cada</u> sección es

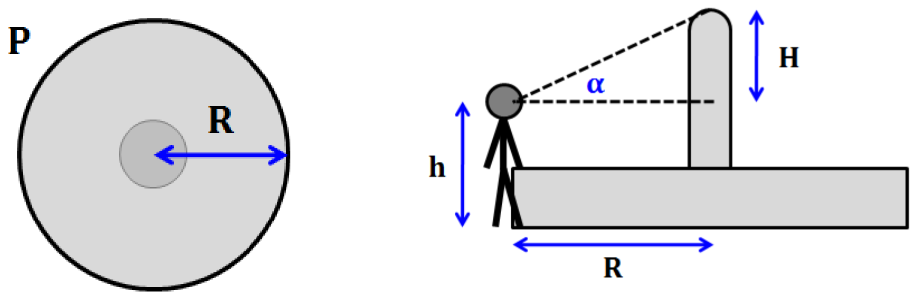
$$A_S = \pi R^2/6$$

Como el área gris es lo que falta para completar el triángulo, se puede calcular su área como:

$$A = A_T - 3A_S = R^2\sqrt{3} - 3\pi R^2/6 = R^2(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2})$$

Pregunta 3: La fuente de agua

Para resolver este problema conviene tener una representación visual del mismo. Tenemos una fuente en medio de una pileta circular, donde conocemos su perímetro. Además sabemos que desde el borde hay que elevar la vista 30° para ver la punta de la fuente.



Para comenzar calcularemos el radio de la pileta: $P = 2\pi R \rightarrow R = P/2\pi = 10/\pi\ [m]$

Con esto, y utilizando la figura de la derecha, podremos calcular la altura $\boldsymbol{H}$ usando trigonometría. Como tenemos un triángulo rectángulo, del cual conocemos sus ángulos y uno de sus catetos, podemos utilizar la definición de la tangente, lo cual nos da: $\tan\alpha = H/R$

$$\boldsymbol{H = R\ \tan(\pi/6) = \frac{10}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{3\pi}\ [m]}$$

Como recomendación, conviene saber los valores del seno, coseno y tangente de los ángulos $\alpha = 0°, 30°, 45°, 60°\ y\ 90°$, ya que suelen aparecer en este tipo de problemas.

OJO: No hemos terminado el ejercicio. Acabamos de calcular $\boldsymbol{H}$ pero no es eso lo que nos piden. Para terminar debemos decir que la altura de la fuente es $\boldsymbol{h + H = 1,80 + \frac{10\sqrt{3}}{3\pi} \approx 3,64\ [m]}$

Si no tienen calculadora se puede dejar expresado con $\boldsymbol{\pi}$, raíces, etc. No hay problema.

Pregunta 4: Vectores

Vimos que existen diferentes formas de escribir un mismo vector. Por ejemplo, en 2 dimensiones:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = (3\ ,7) = 3\hat{x} + 7\hat{y}$$

En la primera forma, las coordenadas se anotan en una columna; el segundo caso se conoce como "par ordenado", y la tercera es la notación por componentes.

Lo primero que hay que entender, es que ponderar un vector por un escalar es lo mismo que multiplicar cada componente por este valor. Por ejemplo en 3 dimensiones:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \qquad\qquad \lambda\,\vec{v} = \begin{pmatrix} \lambda\ a \\ \lambda\ b \\ \lambda\ c \end{pmatrix} = \lambda a\ \hat{x} + \lambda b\ \hat{y} + \lambda c\ \hat{z}$$

Lo segundo es que sumar y restar vectores es equivalente a sumar o restar por componentes:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4 \\ 2+5 \\ 3+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Los vectores unitarios $\boldsymbol{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}}$ (o también se usa $\boldsymbol{\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}}$), se utilizan para señalar de qué coordenada se está hablando. Es decir, son vectores que sólo van en una dirección, y su módulo es 1.

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad \hat{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad \hat{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Podrán notar entonces que, si anoto un vector por componentes, lo que estoy haciendo es:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a\hat{x} + b\hat{y} + c\hat{z} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \vec{v}$$

Es decir, la notación es correcta. (Relean con atención esas igualdades para entenderlas bien).

El producto punto entre dos vectores da como resultado un escalar (un número). La fórmula es:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |A||B| \cos\theta$$

Donde $\boldsymbol{\theta}$ es el ángulo entre ambos vectores (Si son perpendiculares, el producto punto es cero). Pero cuando se conocen los componentes de cada vector, el cálculo es mucho más fácil:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

Es decir, se multiplican los componentes de cada coordenada, y se suman los resultados.

En el ejercicio propuesto nos piden calcular $\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{b}} + \vec{\boldsymbol{b}} \cdot \vec{\boldsymbol{c}}$, que resulta:

$$\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{b}} + \vec{\boldsymbol{b}} \cdot \vec{\boldsymbol{c}} = (\mathbf{2} \cdot \mathbf{1} + \mathbf{0} \cdot \mathbf{3}) + (\mathbf{1} \cdot -\mathbf{1} + \mathbf{3} \cdot -\mathbf{1}) = (\mathbf{3} + \mathbf{0}) + (-\mathbf{1} - \mathbf{3}) = -\mathbf{1}$$

Pregunta 5: El Parque O'higgins

Para la primera parte, uno podría pensar en calcular cuánto se demora la ciclista en recorrer $100\ [m]$, pero en ese tiempo el peatón se habrá desplazado, y no es un método muy útil.
Lo más recomendable es utilizar la <u>velocidad relativa</u> entre ambos, que es la diferencia entre la velocidad del peatón $\boldsymbol{V_P}$ y la velocidad de la ciclista $\boldsymbol{V_C}$ (hay que considerar el sentido, por eso usamos velocidad y no rapidez).
En este caso la ciclista se acerca al peatón a: $\boldsymbol{V_1 = V_C - V_P = 8\ [m/s]}$

Si en un comienzo los separa una distancia de $100[m]$ (esta distancia no es relativa), entonces utilizaremos la definición de *velocidad* para hacer los cálculos:

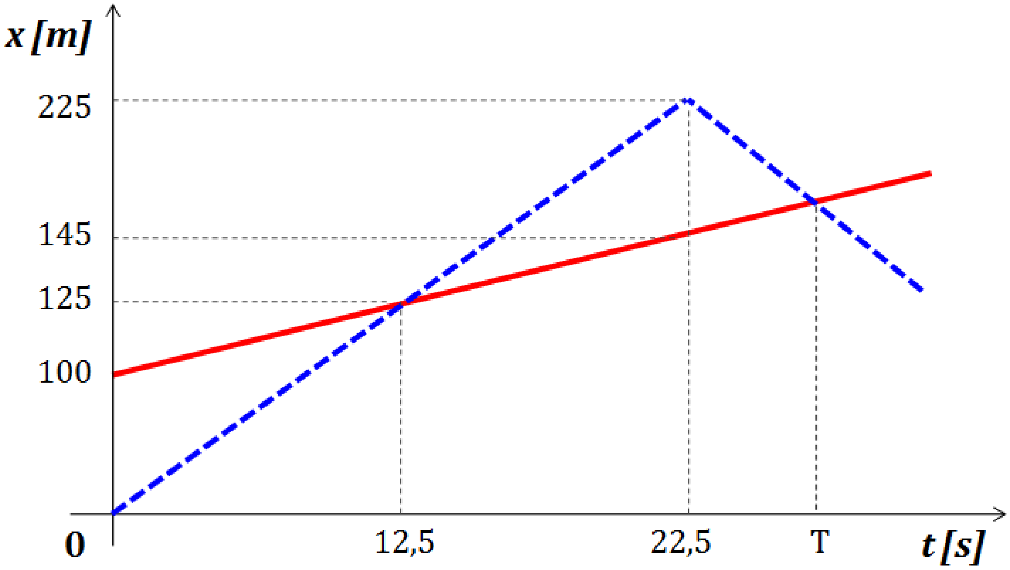
$$v = \frac{d}{t} \quad \rightarrow \quad t = \frac{d}{v} \quad \rightarrow \quad t_1 = \frac{100}{8} = 12{,}5\ [s]$$

Es decir, desde el instante en que se encuentran a $100[m]$ (que por comodidad definiremos $t = 0$), pasan 12,5 segundos hasta que la ciclista alcanza al peatón.

Ahora bien, para la segunda parte necesitamos este tiempo $\boldsymbol{t_1}$ para calcular la distancia que recorrió cada uno (ahora NO hay que usar la velocidad relativa, ¿por qué?).

$$v = \frac{d}{t} \quad \rightarrow \quad d = v \cdot t \quad \rightarrow \quad \begin{cases} D_P = V_P \cdot t_1 = 2 \cdot 12{,}5 = 25\ [m] \\ D_C = V_C \cdot t_1 = 10 \cdot 12{,}5 = 125\ [m] \end{cases}$$

Para entender cómo resolver la tercera parte, nos ayudaremos de un gráfico de la posición del peatón y la ciclista a lo largo del tiempo:



La línea azul punteada representa la bicicleta, y la roja continua el peatón.
Las trayectorias son rectas, debido a que la velocidad es constante y equivale a la pendiente de estas rectas.

Como dice el enunciado, tras alcanzar al peatón la ciclista avanza $100\ [m]$, esto nos dice que llega hasta la posición $125 + 100 = 225[m]$. Además sabemos que para recorrer esa distancia tardó $100/10 = 10\ [s]$.
El peatón ha seguido avanzando, y en esos 10 segundos camina $2 \cdot 10 = 20\ [m]$.
Por lo tanto, en el instante $\boldsymbol{t = 22,5}$ la bicicleta se encuentra en la posición $\boldsymbol{x = 225}$ y el peatón en $\boldsymbol{x = 145}$.
Ahora la ciclista da media vuelta pero mantiene la rapidez, y ya tenemos todos los valores necesarios para saber en qué momento volverán a cruzarse con el peatón, pues sabemos su posición, y tenemos **otra** velocidad relativa $\boldsymbol{V_2}$, ya que ahora avanzan en sentido opuesto.

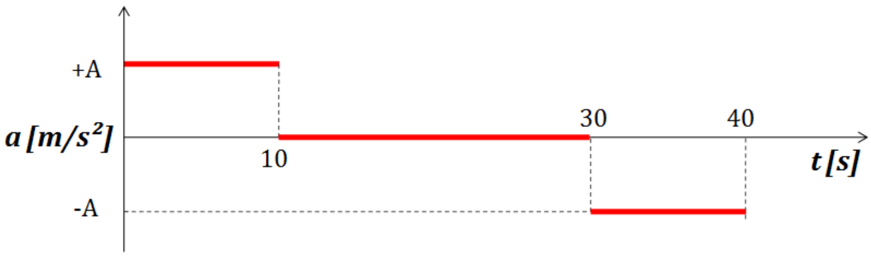
El tiempo que tardan en cruzarse es: $\Delta \boldsymbol{t} = \frac{\mathbf{225}[m]-\mathbf{145}[m]}{\mathbf{10}[m/s]+\mathbf{2}[m/s]} = \frac{\mathbf{80}}{\mathbf{12}} = \mathbf{6,\overline{6}}\ [s]$

Como este intervalo de tiempo se midió desde que la bicicleta dio media vuelta, la respuesta a la pregunta puede ser escrita como: “El peatón y la bicicleta vuelven a cruzarse $\mathbf{16,7}$ segundos después de la primera vez”.

Pregunta 6: El metro

En este problema lo que se pide es representar gráficamente el movimiento del metro, y con esto hacer algunas mediciones.

El primer gráfico que se pide debería ser algo así:



(**NOTA**: Recuerden poner las qué significa cada eje y señalar las dimensiones utilizadas)

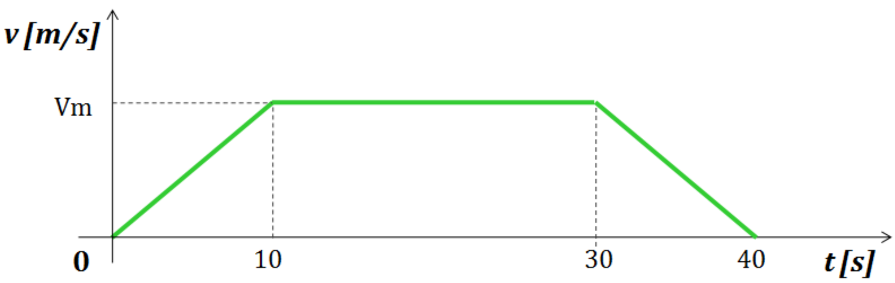
El gráfico es bastante claro. Lo que no es tan claro es ¿por qué tarda 10 segundos en frenar? Puede parecer obvio, y por lo mismo puede ser difícil de argumentar correctamente. La explicación es que, al acelerar con $+\boldsymbol{A}$ durante $\mathbf{10}$ segundos, alcanza la misma velocidad que perdería si frenara con $-\boldsymbol{A}$ durante el mismo intervalo de tiempo. Con fórmulas sería:

$$a = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$V_M = +A \cdot \Delta t_1 = 10A\ [m/s]$$

$$\Delta t_2 = \frac{0 - V_M}{-A} = \frac{-10A}{-A} = 10\ [s]$$

En el segundo gráfico esto queda más claro aún, pues las pendientes de la primera y tercera rectas debiesen ser $+A$ y $-A$ respectivamente.



Para calcular el área bajo la curva utilizamos el resultado antes obtenido para $\boldsymbol{V_M}$. Este también se puede obtener sabiendo que la pendiente de una recta es $\boldsymbol{m} = \Delta\boldsymbol{y}/\Delta\boldsymbol{x}$, en este caso $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{V_M}/\mathbf{10}$. Entonces el área bajo la curva la calculamos como un rectángulo de base $\mathbf{30}\ [\boldsymbol{s}]$ y altura $\boldsymbol{V_M}$:

$$D = 30 \cdot V_M = 30 \cdot 10A = 300 \cdot A\ [m]$$

Para que la distancia recorrida sean 600 metros, el valor de $\boldsymbol{A}$ debe ser obviamente $\mathbf{2}\ [\boldsymbol{m}/\boldsymbol{s}^{\mathbf{2}}]$.