Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
14 de enero del 2013

Control #2MA2001-1 Cálculo en Varias Variables.

Profesor: Marcelo Leseigneur P.
Auxiliar: Martín Castillo - Pedro Pérez.

P1. Considere un sistema de coordenadas $\sum$ (en reposo), de modo que un punto del espacio P en un instante de tiempo t se representa por(x, y, z, t). Considere otro sistema $\sum^*$ que se mueve en dirección x respecto a $\sum$ con velocidad constante u,$(0 < u < c)$ y que cuando $t = 0$ coincide con $\sum$. Sea $\phi(x, y, z, t)$ una función de clase C^2 tal que:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}$$

a) **(2 puntos)** Para representar un punto P, de coordenadas (x, y, z, t) en $\sum$ en el sistema $\sum^*$ se plantea el siguiente cambio de variables que corresponde al enfoque clásico(Galileo):

$$x' = x - ut,\ y' = y,\ z' = z,\ t' = t$$

Deduzca dicho cambio de variables. Sea $\phi_1(x', y', z', t') = \phi(x, y, z, t)$. Demuestre que:

$$\frac{\partial^2\phi_1}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2\phi_1}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2\phi_1}{\partial z'^2} = \frac{1}{c^2}(\frac{\partial^2\phi_1}{\partial t'^2} + u^2\frac{\partial^2\phi_1}{\partial x'^2} - 2u\frac{\partial^2\phi_1}{\partial x'\partial t'})$$

b) También se plantea el siguiente cambio de variables que corresponde al enfoque al enfoque relativista(Lorentz)

$$x' = \gamma_0(x - ut),\ y' = y,\ z' = z,\ t' = \gamma_0(t - \frac{u}{c^2}x)$$

Donde γ_0 es una constante de valor $\gamma_0 = \left(1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}$. En este caso considere $\phi_2(x', y', z', t') = \phi(x, y, z, t)$.

b.1) **(2 puntos)** Pruebe que

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \gamma_0(\frac{\partial\phi_2}{\partial x'} - \frac{u}{c^2}\frac{\partial\phi_2}{\partial t'})$$
$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \gamma_0(\frac{\partial\phi_2}{\partial t'} - u\frac{\partial\phi_2}{\partial x'})$$
$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial\phi_2}{\partial y'}$$
$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{\partial\phi_2}{\partial z'}$$

b.2) **(2 puntos)** Demuestre que:

$$\frac{\partial^2\phi_2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2\phi_2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2\phi_2}{\partial z'^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi_2}{\partial t'^2}$$

b.3) **(1 punto)** Explique la diferencia entre el cambio de variables hecho en a) y b) desde el punto de vista físico.

P2. a) **(3 puntos)** Sea $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \neq 0,\ y \neq 0\}$, $\phi, \varphi \in C^1(\mathbb{R})$. Definimos $u : D \to \mathbb{R}$

$$u(x, y) = x\phi(y) + y\varphi(x)$$

Encuentre una Ecuación en Derivadas Parciales(EDP) de segundo orden, que no dependa de ϕ ni φ y que tenga como solución general a u.
Hint: Divida u por x y derive parcialmente con respecto a x y luego con respecto a y.

b)

b.1) **(1.5 puntos)** Pruebe que la ecuación $x^2y - y^2x + z^2cos(xz) = 1$ define una función implícita $z = z(x,y)$ en un entorno del punto $(0, \sqrt{2}, 1)$.

b.2) **(0.5 puntos)** Halle el plano tangente a la superficie $z = z(x,y)$ en el punto $(0, \sqrt{2})$.

b.3) **(1 punto)** Encuentre el desarrollo de Taylor de segundo orden en $(0, \sqrt{2})$.

P3. a) Una partícula se encuentra sobre el manto de ecuación:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{sen(xy)}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

inicialmente en $(0,0,0)$.

a.1) **(1.5 puntos)** Encuentre las direcciones en que la partícula enfrenta mayor pendiente.

a.2) **(1.5 puntos)** Encuentre la dirección en la que el descenso en z es mas pronunciado.

a.3) **(1 punto)** Señale que sucede para las direcciones $(0,1)$ y $(0,-1)$.

Hint: Le puede ser útil considerar que las posibilidades de desplazamiento están dadas por el vector $(cos(\theta), sen(\theta))$.

b) **(2 puntos)** Considere $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2. Demuestre que el cambio de variable definido por: $u(x,y) = \frac{y^2-x^2}{2}$ y $v(x,y) = \frac{y^2+x^2}{2}$ transforma la ecuación:

$$y^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - x^2\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$$

en

$$2(v^2 - u^2)\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = v\frac{\partial F}{\partial u} - u\frac{\partial F}{\partial v}$$

Tiempo: 3 horas.