

Auxiliar #11MA2001-1 Cálculo en Varias Variables.

Profesor: Marcelo Leseigneur P.
 Auxiliar: Martín Castillo - Pedro Pérez.

P1. Determine los máximos y mínimos locales y/o globales de la siguiente función

$$f(x, y) := xye^{-(x^2+y^2)}$$

P2. Suponga que hay 2 tipos de medios transparentes, separados por una línea gruesa. Dentro del primero (arriba) la velocidad de la luz es $\frac{c}{n_1}$, mientras que en el segundo (abajo) es $\frac{c}{n_2}$, donde c es la velocidad de la luz en el vacío. Los números n_1, n_2 son llamados índices de refracción.

Por simplicidad supondremos que $c = 1$ y que $n_2 > n_1$. Dados 2 puntos A, B en el medio 1 y 2 respectivamente (como en la figura 1), donde a, b, c puede ser considerados fijos, la idea del problema es determinar lo siguiente:

Encontrar la relación entre α_1, α_2, n_1 y n_2 para que el tiempo de viaje entre A y B sea mínimo.

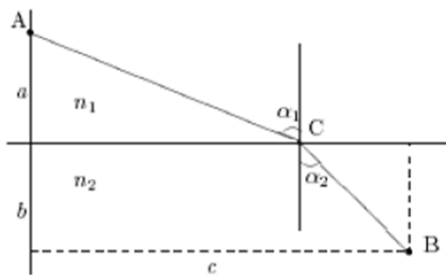


Figure 1:

Para ello:

- Plantee el problema como un problema de optimización.
- Resolviendo el problema pruebe que

$$\frac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\alpha_2)} = \frac{n_2}{n_1}$$

P3. Considere $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = (x_1 x_2 \cdots x_n)^2$$

donde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Sea $S := \partial B(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$

- Demuestre que f restringida a S (i.e. $f|_S$) alcanza su máximo y su mínimo.
- Usando multiplicadores de Lagrange, encuentre los puntos de S donde se alcanza el máximo para $f|_S$. Justifique porque son máximos.
- De lo anterior, deduzca que si $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$(x_1 x_2 \cdots x_n)^2 \leq \frac{1}{n^n} (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^n$$

Hint: Recuerde que si $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ entonces $\frac{x}{\|x\|_2} \in S$

- Con los resultados anteriores, pruebe que si $a_1, a_2, \dots, a_n$ son reales no negativos, entonces

$$(a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$$