Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
January 17, 2013

Auxiliar #10MA2001-1 Cálculo en Varias Variables.

Profesor: Marcelo Leseigneur P.
Auxiliar: Martín Castillo - Pedro Pérez.

P1. Sea $\mathcal{R}$ la region en el plano $\mathbb{R}^2$ limitada por las curvas

$$x^2 - y^2 = 1 \quad x^2 - y^2 = 9 \quad x + y = 4 \quad x + y = 6$$

P2. (Fubbini) Muestre que para f integrable:

$$\int_0^\infty \int_0^x f(x,y)dydx = \int_0^\infty \int_y^\infty f(x,y)dxdy$$

P3. Considere el cambio de variables dado por $u = x + y$ $v = x - y$ que transforma la región $\mathcal{R}$ del plano xy en la región $\mathcal{T}$ del plano uv.

a) Dibuje las regiones $\mathcal{R}$ y $\mathcal{T}$.

b) Exprese el área de la región $\mathcal{R}$ como la suma de 3 integrales en las variables x e y, en el orden de integración dydx. Explicite los limites de integración y resuelva hasta donde pueda.

c) Utilizando el cambio de variables demuestre que el área de la región $\mathcal{R}$ es $4\ln(\frac{3}{2})$.

P4. Calcule

$$I = \int_0^{\sqrt{2}} \int_{\frac{y}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \cos(\pi x^2)dxdy$$

P5. Una lamina D tiene forma de semidisco de radio a. Hallar la masa de la lamina y su centro de masa, sabiendo que la densidad de masa varia proporcionalmente a la distancia al centro del lado recto de la lamina.
Recuerdo: Sea $\rho : D \to \mathbb{R}$ la densidad de masa, entonces

$$\text{Masa Total } = M(D) = \iint_D \rho(x,y)dxdy$$

y las coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ del centro de masa están dados por.

$$\bar{x} = \frac{1}{M(D)} \iint_D x\rho(x,y)dxdy \quad \bar{y} = \frac{1}{M(D)} \iint_D y\rho(x,y)dxdy$$

P6. Considere $S := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x,y \geq 0,\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ y la densidad de masa $\rho(x,y) = xy$. Calcule la masa de S si su densidad esta dada por $\rho(x,y)$.

P7. Sea $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \quad \sin(x) \leq y \leq \cos(x)\}$

a) Dibuje la región.

b) Calcule el area de A.

c) Sea $f(x,y) = xy$ la densidad de masa. Calcule la masa total M de A, donde

$$M := \iint\limits_A f(x,y)dxdy$$

d) Calcule el centro de gravedad $(\bar{x}, \bar{y})$ de A, donde

$$\bar{x} := \frac{1}{M} \iint\limits_A xf(x,y)dxdy \quad \bar{y} := \frac{1}{M} \iint\limits_A yf(x,y)dxdy$$

e) Sea Ω el conjunto generado por hacer rotar A entorno al eje y. Calcule el volumen de Ω.

- Teorema del Cambio de Variables:

  Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto $T : \Omega \to \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1. Sea D' una región abierta y cotada tal que $\overline{D'} \subseteq \Omega$ y supongamos ademas que T es inyectiva en D', que la matriz $JT(u)$ es invertible $\forall u \in D'$ y que $D = T(D')$ es un abierto. Sea $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces

$$\int_D f(x)dx = \int_{D'} f(T(u))|det(T'(u))|du$$