Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
January 10, 2013

Auxiliar #9 Extendida MA2001-1 Cálculo en Varias Variables.

Profesor: Marcelo Leseigneur P.
Auxiliar: Martín Castillo - Pedro Pérez.

P1. Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times m}$, sea $b \in \mathbb{R}^n$ se define $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ como

$$f(x) = \|Ax - b\|^2$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma euclidiana, Calcule ∇f usando la regla de la Cadena.

P2. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciable. Diremos que f es homogénea de grado p si

$$(\forall x \neq 0)(\forall t > 0)(f(tx) = t^p f(x))$$

Se mostrara que f es homogénea de grado p si y solo si $Jf(x)x = pf(x)$ $\forall x \neq 0$
Para esto haga lo siguiente:

- $\Rightarrow$ defina $\varphi(t) = f(tx)$ derive de 2 formas distintas utilizando la condición de homogénea de grado p y evalué en un t apropiado.
- $\Leftarrow$ Muestre que $\varphi(t)t^{-p}$ es constante y concluya.

P3. Un viejo problema de las matemáticas era poder determinar si el numero $0.9^{0.1}$ es mayor o menor que 1. Con las herramientas del Calculo en Varias Variables obtendremos una aproximación al problema. Para esto defina la función

$$f(x, y) = x^y$$

Y calcule su polinomio de Taylor de Orden 2 en torno a $(1, 0)$. Luego concluya.

P4. En la Figura 1 se observan dos placas metálicas separadas por un angulo θ_0 y una carga eléctrica $q > 0$ de masa m, ubicada inicialmente en reposo en la bisectriz del angulo θ_0.

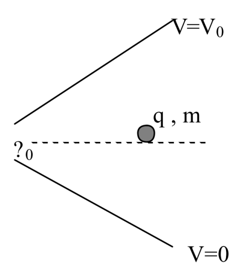

Figure 1:

La fuerza neta que actúa sobre la masa m de carga q es la fuerza ejercida por las placas y esta dada por:

$$\overrightarrow{F}_{\text{eléctrica}} = q\overrightarrow{E}_{\text{eléctrica}}$$

donde $\overrightarrow{E} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ se denomina campo eléctrico, el cual es conservativo; es decir, existe $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de clase C^2 tal que

$$\overrightarrow{E} = -\nabla\phi$$

como la fuerza eléctrica es conservativa, se define la energía potencial eléctrica como $U(x, y, z) = q\phi(x, y, z)$.
Finalmente la energía total de la partícula es:

$$\frac{1}{2}mv^2 + q\phi(x, y, z) = Cte$$

donde v: velocidad y ϕ: el potencial. Nos proponemos determinar la velocidad que alcanza la partícula justo antes de chocar con la placa inferior. Para ello debemos determinar una expresión para el potencial eléctrico entre ambas placas, el cual satisface la ecuación:

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0 \quad (\clubsuit)$$

Para resolver proceda de la siguiente manera:

a) Considere el cambio de variables a coordenadas cilíndricas

$$\begin{cases} x &= r\cos(\theta) \\ y &= r\sin(\theta) \\ z &= z \end{cases}$$

Demuestre que la ecuación ($\clubsuit$) se transforma en:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0$$

b) Suponga que el potencial solo depende del angulo, es decir, $\phi(r,\theta,z) = V(\theta)$. Determine explicitamente $V(\theta)$ si $V(0) = 0$, $V(\theta_0) = V_0$.

c) Aplicando conservación de la energía, calcule la velocidad v de la partícula justo antes de chocar con la placa inferior.

d) A partir de $V(\theta)$, calcule $V(x,y,z)$. Determine $\overrightarrow{E}$.

P5. Pruebe que la ecuación $xy = \ln(\frac{x}{y})$ admite una única solución $y = \phi(x)$ de clase C^∞ definida en una vecindad de $x_0 = \sqrt{e}$, tal que $\phi(x_0) = \frac{1}{\sqrt{e}}$. Deduzca que la función ϕ posee un máximo local en x_0.

P6. Sea $F(x,y,z) := z^3\ln(xy) + 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8$. Pruebe que la función $F(x,y,z) = 0$ define exactamente dos funciones de clase C^1, $z = \varphi_i(x,y)$ $i = 1,2$ en un entorno del punto $(x_0,y_0) = (1,1)$. Encuentre los desarrollos de Taylor de primer orden de ambas funciones en $(x_0,y_0) = (1,1)$.

P7. Sean $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dos funciones de clase C^2. Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un punto tal que $\nabla f(x_0) = 0$ y $H_f(x_0)$ es invertible. Demuestre que para cada $a \in \mathbb{R}$ suficientemente pequeño, la función

$$f_a(x) := f(x) + ag(x)$$

posee al menos un punto critico.

P8. Considere el sistema:

$$x^2 + xy + z^3 = 1$$
$$x^5 + xy^2 - z^4 = 1$$

- Muestre que es posible despejar x e y en funcion de z en una vecindad del punto $(1,0,0)$.
- Encuentre $\frac{\partial x}{\partial z}(0)$ y $\frac{\partial y}{\partial z}(0)$

- **Regla de la Cadena**

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\Lambda \subset \mathbb{R}^m$, abiertos. Sean $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$, $g : \Lambda \to \mathbb{R}^k$. Si f es diferenciable en x_0, $f(\Omega) \subset \Lambda$ y g es diferenciable en $f(x_0)$. Entonces $(g\ o\ f) : \Omega \to \mathbb{R}^k$ es diferenciable en x_0 y ademas:

$$J(g\ o\ f)(x_0) = Jg(f(x_0))Jf(x_0)$$

- **Taylor**

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. El Polinomio de Taylor de Orden 2 de f en torno a x_0 es:

$$P_{2,x_0}(x) = f(x_0) + < \triangledown f(x_0), x - x_0 > + \frac{1}{2}(x-x_0)^t H_f(x_0)(x-x_0)$$

- **Teorema de la función inversa:**

  Sea f una función de clase C^1, definida en un abierto A de $\mathbb{R}^n$ con valores en $\mathbb{R}^n$. Si $Jf(a)$ es invertible, entonces existe un abierto V en $\mathbb{R}^n$ que contiene a a y tal que la restricción

  $$\overline{f} : V \to f(V)$$

  de la función f es biyectiva y su función inversa $\overline{f}^{-1}$ es de clase C^1. Se tendrá ademas para $b := f(a)$ que

  $$J\overline{f}^{-1}(b) = [J\overline{f}(a)]^{-1}$$

- **Teorema de la función implícita:**

  Sea un abierto $A \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ y una función de clase C^1 $f : A \to \mathbb{R}^m$, definimos la ecuación

  $$f(x_1, x_2) = 0 \tag{1}$$

  Entonces, si $a = (a_1, a_2) \in A$ verifica la ecuación (1) y si $D_2f(a)$ es biyectiva en $\mathbb{R}^m$, se tiene que existe una bola $B(a_1, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R}^n$ y una función de clase C^1

  $$\phi : B(a_1, \varepsilon) \to \mathbb{R}^m$$

  tales que

  $$\phi(a_1) = a_2 \;\; f(x, \phi(x)) = 0 \;\; \forall x \in B(a_1, \varepsilon)$$

  Se tiene ademas la formula $J\phi(a_1) = -D_2f(a)^{-1} \circ D_1f(a)$