Auxiliar #9 Extendida MA2001-1 Cálculo en Varias Variables.

Profesor: Marcelo Leseigneur P.
 Auxiliar: Martín Castillo - Pedro Pérez.

P1. Pruebe que la ecuación $xy = \ln(\frac{x}{y})$ admite una única solución $y = \phi(x)$ de clase C^∞ definida en una vecindad de $x_0 = \sqrt{e}$, tal que $\phi(x_0) = \frac{1}{\sqrt{e}}$. Deduzca que la función ϕ posee un máximo local en x_0 .

Solución:

Para este problema usaremos el Teorema de la función implícita. Tomemos f de la siguiente manera $f(x, y) = xy - \ln(\frac{x}{y})$.

Notemos que $f(\sqrt{e}, \frac{1}{\sqrt{e}}) = \sqrt{e} \frac{1}{\sqrt{e}} - \ln(\frac{\sqrt{e}}{\frac{1}{\sqrt{e}}}) = 1 - 1 = 0$

Claramente f es continua en $(\sqrt{e}, \frac{1}{\sqrt{e}})$ por composición de funciones continuas en $(\sqrt{e}, \frac{1}{\sqrt{e}})$.

Ahora verifiquemos que las derivadas parciales son continuas en $(\sqrt{e}, \frac{1}{\sqrt{e}})$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x + \frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y - \frac{1}{x}$$

Que son continuas en $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \neq 0, y \neq 0\}$. Por lo tanto $f \in C^1(D)$.

Ahora verifiquemos que $D_2 f(\sqrt{e}, \frac{1}{\sqrt{e}}) \neq 0$ (condición de invertibilidad de $D_2 f(\sqrt{e}, \frac{1}{\sqrt{e}})$). Calculemos

$$D_2 f(\sqrt{e}, \frac{1}{\sqrt{e}}) = \frac{\partial f}{\partial y}(\sqrt{e}, \frac{1}{\sqrt{e}}) = \sqrt{e} + \frac{1}{\sqrt{e}} = 2\sqrt{e} \neq 0$$

Así por el Teorema de la Función Implícita existe una bola $B(\sqrt{e}, \epsilon) \subseteq \mathbb{R}$ y una función $\phi : B(\sqrt{e}, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 . Tal que $\phi(\sqrt{e}) = \frac{1}{\sqrt{e}}$ y $f(x, \phi(x)) = 0, \forall x \in B(\sqrt{e}, \epsilon)$

Ahora para demostrar que $\phi \in C^\infty$ notemos que $x\phi(x) = \ln(x) - \ln(\phi(x)), \forall x \in B(\sqrt{e}, \epsilon)$ derivando obtenemos:

$$\phi(x) + x\phi'(x) = \frac{1}{x} - \frac{\phi'(x)}{\phi(x)} \Leftrightarrow x\phi^2(x) + x^2\phi(x)\phi'(x) = \phi(x) - x\phi'(x) \Leftrightarrow$$

Luego derivando esta ultima expresión n-veces y despejando $\phi^{(n+1)}(x)$ Llegamos a:

$$\phi^{(n+1)}(x) = \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \phi^{(k)}(x) \phi^{(n-k)}(x) + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (x^2 \phi(x))^{(k)} \phi^{(n-k+1)}(x) + \phi^{(n)}(x)(n-1) \right) \frac{1}{x^2 \phi(x) + x}$$

Así inductivamente si $\phi \in C^k \Rightarrow \phi \in C^{k+1}$ y como $\phi \in C^1$ se tiene que $\phi \in C^\infty$.

Máximo local no entra.

P2. Sea $F(x, y, z) := z^3 \ln(xy) + 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8$. Pruebe que la función $F(x, y, z) = 0$ define exactamente dos funciones de clase C^1 , $z = \varphi_i(x, y) i = 1, 2$ en un entorno del punto $(x_0, y_0) = (1, 1)$. Encuentre los desarrollos de Taylor de primer orden de ambas funciones en $(x_0, y_0) = (1, 1)$.

Solución:

Para usar el teorema de la función implícita queremos que $F(x, y, z) = 0$ osea encontrar z tal que

$$F(1, 1, z) = 0 \Leftrightarrow z^2 + 7z + 12 = 0 \Leftrightarrow z_1 = -3, z_2 = -4$$

Claramente $F \in C^\infty(\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x \neq 0, y \neq 0\})$

En este caso es conveniente ver $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ entonces

$$D_2F(x, y, z) = \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = 3z^2 \ln(xy) + 2z + 8 - 1$$

Evalutando en $(1, 1, -3)$ y $(1, 1, -4)$:

$$\frac{\partial F}{\partial z}(1, 1, -3) = 1 \neq 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(1, 1, -4) = -1 \neq 0$$

Así por el Teorema de la función implícita existen $\phi_1, \phi_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que son C^1 y $\phi_1(1, 1) = -3, \phi_2(1, 1) = -4$ y existen entornos V_1 y V_2 tal que:

$$F(x, y, \phi_1(x, y)) = 0, \forall (x, y) \in V_1$$

$$F(x, y, \phi_2(x, y)) = 0, \forall (x, y) \in V_2$$

Ademas se tiene que:

$$J\phi_i(x, y) = -D_2f(x, y, z_i)^{-1} \circ D_1f(x, y, z_i) = -\left(\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z_i)\right)^{-1} \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z_i), \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z_i)\right)^t$$

Ahora calculemos:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = \frac{z^3}{x} + 4x + 8z$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = \frac{z^3}{y} + 4y$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = 3z^2 \ln(xy) + 2z + 8 - 1$$

Con esto podemos encontrar explícitamente:

$$P_{1,(1,1)}[\phi_i](x, y) = \phi_i(1, 1) + \langle \nabla \phi_i(1, 1), (x, y) - (1, 1) \rangle$$

Calculemos:

$$\nabla \phi_1(1, 1) = -(-1)^{-1}(-47, -23)^t$$

$$\nabla \phi_2(1, 1) = -(1)^{-1}(-92, -60)^t$$

Así:

$$P_{1,(1,1)}[\phi_1](x, y) = -3 + \langle (-47, -23), (x-1, y-1) \rangle = -3 - 47(x-1) - 23(y-1)$$

$$P_{1,(1,1)}[\phi_2](x, y) = -4 + \langle (92, 60), (x-1, y-1) \rangle = -4 + 92(x-1) + 60(y-1)$$

P3. Sean $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones de clase C^2 . Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un punto tal que $\nabla f(x_0) = 0$ y $H_f(x_0)$ es invertible. Demuestre que para cada $a \in \mathbb{R}$ suficientemente pequeño, la función

$$f_a(x) := f(x) + ag(x)$$

posee al menos un punto critico.

Solución:

Definamos la función $F(x, a) = \nabla f(x) + a \nabla g(x)$ y por las hipótesis $F \in C^1$. Se tiene que:

$$F(x_0, 0) = 0$$

Notemos también que $D_1F(x_0, 0) = H_f(x_0)$ la cual es invertible. Así podemos usar el Teorema de la Función Implícita y obtenemos que existen $(\phi, \epsilon) : \phi : B(0, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\phi(x_0) = 0, \phi \in C^1$ y

$$F(\phi(a), a) = 0, \forall a \in B(0, \epsilon)$$

Luego notando que dado a fijo: $F(x, a) = \nabla f(x)$. Osea que para todo $a \in B(0, \epsilon)$ existe un $x = \phi(a)$ tal que x es un punto critico de f_a .

P4. Considere el sistema:

$$\begin{aligned}x^2 + xy + z^3 &= 1 \\x^5 + xy^2 - z^4 &= 1\end{aligned}$$

- Muestre que es posible despejar x e y en función de z en una vecindad del punto $(1, 0, 0)$.
- Encuentre $\frac{\partial x}{\partial z}(0)$ y $\frac{\partial y}{\partial z}(0)$

Solución:

Definamos $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$F(z, x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + xy + z^3 - 1 \\ x^5 + xy^2 - z^4 - 1 \end{pmatrix}$$

Claramente $F(0, 1, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Verifiquemos que $D_2F(0, 1, 0)$ sea invertible.

$$D_2F(z, x, y) = \begin{pmatrix} \nabla_{x,y} F_1 \\ \nabla_{x,y} F_2 \end{pmatrix}$$

Calculemos:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = 2x + y$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = x$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = 5x^4 + y^2$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial y} = 2xy$$

Así:

$$D_2F(0, 1, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

la cual es claramente invertible.

Luego por TFI se puede despejar x e y en función de z .

i.e.: existe $\phi : B(0, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$F(z, \phi(z)) = 0, \quad \forall z \in B(0, \epsilon)$$

Se tiene además la siguiente fórmula:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial z}(0) \\ \frac{\partial y}{\partial z}(0) \end{pmatrix} = J\phi(0) = -D_2F(0, 1, 0)^{-1} D_1F(0, 1, 0) = -\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

• **Punto Crítico**

x es un punto crítico de f si $Jf(x) = 0$

• **Taylor**

Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. El Polinomio de Taylor de Orden 2 de f en torno a x_0 es:

$$P_{2,x_0}(x) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle + \frac{1}{2}(x - x_0)^t H_f(x_0)(x - x_0)$$

- **Teorema de la función inversa:**

Sea f una función de clase C^1 , definida en un abierto A de $\mathbb{R}^n$ con valores en $\mathbb{R}^n$. Si $Jf(a)$ es invertible, entonces existe un abierto V en $\mathbb{R}^n$ que contiene a a y tal que la restricción

$$\bar{f} : V \rightarrow f(V)$$

de la función f es biyectiva y su función inversa $\bar{f}^{-1}$ es de clase C^1 . Se tendrá además para $b := f(a)$ que

$$J\bar{f}^{-1}(b) = [Jf(a)]^{-1}$$

- **Teorema de la función implícita:**

Sea un abierto $A \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ y una función de clase C^1 $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$, definimos la ecuación

$$f(x_1, x_2) = 0 \tag{1}$$

Entonces, si $a = (a_1, a_2) \in A$ verifica la ecuación (1) y si $D_2f(a)$ es biyectiva en $\mathbb{R}^m$, se tiene que existe una bola $B(a_1, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R}^n$ y una función de clase C^1

$$\phi : B(a_1, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^m$$

tales que

$$\phi(a_1) = a_2 \quad f(x, \phi(x)) = 0 \quad \forall x \in B(a_1, \varepsilon)$$

Se tiene además la fórmula $J\phi(a_1) = -D_2f(a)^{-1} \circ D_1f(a)$