Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
28 de diciembre del 2012

Control #1MA2001-1 Cálculo en Varias Variables.

Profesor: Marcelo Leseigneur P.
Auxiliar: Martín Castillo - Pedro Pérez.

P1. i) Estudiar si las siguientes funciones definen una norma en $\mathbb{R}^2$.

a) **(0.75 puntos)** $\|(x,y)\| = \sqrt{4x^2+y^2}$.

b) **(0.75 puntos)** $\|(x,y)\| = \sqrt{|x|+|y|}$.

c) **(0.75 puntos)** $\|(x,y)\| = |x| + \sqrt[3]{|x|^3+|y|^3}$.

d) **(0.75 puntos)** $\|(x,y)\| = \sqrt{(x-y)^2+y^2}$.

ii) Considere la siguiente familia de funciones continuas $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in [0, \frac{1}{2^{n+1}}) \\ n2^{n+2}(x - \frac{1}{2^{n+1}}) & \text{si} \quad x \in [\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{3}{2^{n+2}}) \\ -n2^{n+2}(x - \frac{3}{2^{n+2}}) + n & \text{si} \quad x \in [\frac{3}{2^{n+2}}, \frac{1}{2^n}) \\ 0 & \text{si} \quad x \in [\frac{1}{2^n}, 1] \end{cases}$$

a) **(1.0 puntos)** Muestre que (f_n) converge puntualmente y defina $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ $\forall x \in [0,1]$.

b) **(1.0 puntos)** Muestre que (f_n) converge en $C[0,1]$ con la norma $\|\cdot\|_1$.

c) **(1.0 puntos)** ¿ La sucesión (f_n) es de Cauchy en $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$?

P2. Sea E el espacio de los polinomios en $\mathbb{R}$ con coeficientes reales. Se consideran las aplicaciones $N_\infty : E \to \mathbb{R}$ $N_\infty(P) = \sup_{0\le i\le q} |a_i|$, donde $P(x) = \sum_{i=0}^{q} a_i x^i$, $\phi : E \to \mathbb{R}$, $\phi(P) = P(1)$,

Se pide:

a) **(1.5 puntos)** Mostrar que N_∞ es una norma sobre E.

b) **(1.0 puntos)** Mostrar que ϕ es lineal.

c) **(1.0 puntos)** Le considera la familia de polinomios $P_n(x) := \sum_{i=0}^{n} x^i$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Se pide calcular $N_\infty(P_n)$ y $\phi(P_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

d) **(1.0 puntos)** Deduzca que ϕ no es continua.

e) **(1.5 puntos)** Sea $p \in \mathbb{N}$ fijo, considere $E_p \subseteq E$ como el espacio de los polinomios de grado menor o igual a p. Se dota a E_p de la norma N_∞ muestre que $\phi_{|E_p}$ es continua.

P3. i) Considere la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin(\frac{1}{x^2+y^2}) & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) **(0.5 puntos)** Muestre que f es continua en $\mathbb{R}^2$.

b) **(0.75 puntos)** ¿ $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en $(0,0)$?

c) **(0.75 puntos)**¿ f es diferenciable en $(0,0)$?

ii) Estudiar la continuidad y la diferenciabilidad de las siguientes funciones.

a) **(1.0 puntos)**$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2\ln(y)}{x^4+(x^2+\ln(y))^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,1) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,1) \end{cases}$

b) **(1.0 puntos)**$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{y}\sin(x^2+y^2) & \text{si} \quad y \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad y = 0 \end{cases}$

iii) **(2.0 puntos)** Identifique a cada una de las funciones $\{a, b, c, d, e, f\}$, con las tablas o gráficos $\{i, ii, ..., ix\}$ que aparecen a continuación. Ojo alguna de las funciones podria no identificarse con ninguna tabla o gráfico, y otras podrian poseer más de una asignación. Tabule sus respuestas.

a) $f(x, y) = x^2 - y^2$.

b) $f(x, y) = 6 - 2x + 3y$.

c) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

d) $f(x, y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$

e) $f(x, y) = 6 - 2x - 3y$

f) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

(i)

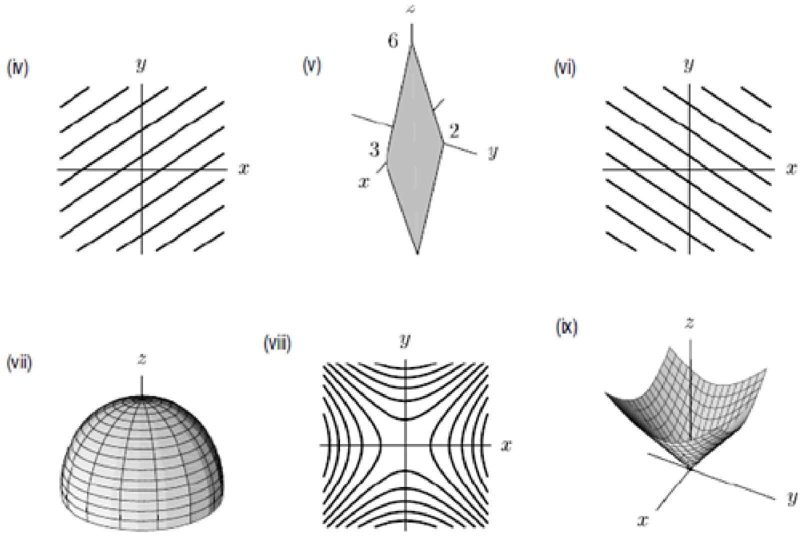
y \ x	-2	-1	0	1	2
2	2.828	2.236	2.000	2.236	2.828
1	2.236	1.414	1.000	1.414	2.236
0	2.000	1.000	0.000	1.000	2.000
-1	2.236	1.414	1.000	1.414	2.236
-2	2.828	2.236	2.000	2.236	2.828

(ii)

y \ x	-2	-1	0	1	2
2	0.111	0.167	0.200	0.167	0.111
1	0.167	0.333	0.500	0.333	0.167
0	0.200	0.500	1.000	0.500	0.200
-1	0.167	0.333	0.500	0.333	0.167
-2	0.111	0.167	0.200	0.167	0.111

(iii)

y \ x	-2	-1	0	1	2
2	0.00	-3.00	-4.00	-3.00	0.00
1	3.00	0.00	-1.00	0.00	3.00
0	4.00	1.00	0.00	1.00	4.00
-1	3.00	0.00	-1.00	0.00	3.00
-2	0.00	-3.00	-4.00	-3.00	0.00



P4. a) **(3.0 puntos)** Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Se define $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como $f(x,y) = x^2 g(\frac{x}{y}) + xyh(\frac{x}{x+y}, \frac{x^2}{y^2})$. Demuestre que:

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = f$$

b) **(3.0 puntos)** Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ considere $f(\rho, \theta) = F(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta))$. Demuestre que:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2$$

TIEMPO: 3 HORAS.