Auxiliar #8MA2001-1 Cálculo en Varias Variables.

Profesor: Marcelo Leseigneur P.
Auxiliar: Martín Castillo - Pedro Pérez.

P1. Demuestre las siguientes proposiciones:

- $C^\infty(\mathbb{R}^n) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(\mathbb{R}^n)$
- $C^{k+1}(\mathbb{R}^n) \subseteq C^k(\mathbb{R}^n)$, $\forall k \in \mathbb{N}$
- $C^k(\mathbb{R}^n) \not\subseteq C^{k+1}(\mathbb{R}^n)$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Para esto estudie la función $x^k \operatorname{sen}(\frac{1}{x})$

P2. Regla de Leibniz

Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^1$. Queremos demostrar que bajo estas condiciones

$$\frac{d}{d\lambda} \int_a^b f(x, \lambda) dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda) dx, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

Para esto escriba $\frac{1}{h} (\int_a^b f(x, \lambda + h) - f(x, \lambda) dx)$ de forma adecuada y use el Teorema del Valor medio para concluir que para cada x , $\exists \lambda_x \in [\lambda, \lambda + h]$ que cumple

$$\frac{f(x, \lambda + h) - f(x, \lambda)}{h} = \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda_x), \quad \forall x \in [a, b]$$

y concluya.

P3. Derivadas direccionales:

- Calcular las derivadas direccionales de las siguientes funciones:
 - a) $\ln(\sqrt{x^2 + y^2})$ en el punto $(1, 0)$ en la dirección $\frac{2}{\sqrt{5}}i + \frac{1}{\sqrt{5}}j$
 - b) $e^x \cos(xy)$ en el punto $(0, -1)$ en la dirección $\frac{-1}{\sqrt{5}}i + \frac{2}{\sqrt{5}}j$
- Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, diferenciable en todo su dominio. Demuestre usando el Teorema del Valor Medio que

$$\frac{\partial f}{\partial e}(x) = \langle \nabla f(x), e \rangle, \quad \forall e \in \mathbb{R}^n$$

Donde $\frac{\partial f}{\partial e}(x)$ denota la derivada direccional de f en x con respecto al vector e .

- Sea $f(x, y) = \frac{y \operatorname{sen}^2(x)}{x^2 + y^2}$
 - a) Muestre que f es reproducible en 0.
 - b) Calcule $\frac{\partial f}{\partial e}(0)$ para cualquier vector unitario e .
 - c) Calcule las derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0)$$

- d) ¿Es f diferenciable en 0?

P4. Usando el cambio de variables $u = x$, $v = xy^2$ encuentre una solución a la Ecuación en Derivadas Parciales

$$2x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Donde $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^1(D)$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x, y > 0\}$

- **Teorema del Valor Medio**

Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. Sea $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en todo U . Entonces para todo $x, y \in U$ que cumplen $[x, y] \subseteq U$, se tiene que existe $z \in [x, y]$ tal que

$$f(x) - f(y) = \langle \nabla f(z), x - y \rangle$$

- **Observación** Si $f \in C^1 \implies f$ es diferenciable.