Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
January 4, 2013

Auxiliar #7MA2001-1 Cálculo en Varias Variables.

Profesor: Marcelo Leseigneur P.
Auxiliar: Martín Castillo - Pedro Pérez.

P1. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable. Demuestre la siguiente equivalencia:

$$f(x) = constante \ \forall x \in \mathbb{R}^n \iff \bigtriangledown f(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

P2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $f \in C^2$. Considere la siguiente EDP

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad \lambda > 0 \quad (1)$$

Nos proponemos encontrar soluciones de (1)

a) Sea $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ el cambio de variables dado por:

$$\varphi(x, y) = \begin{pmatrix} u = x + \lambda y \\ w = x - \lambda y \end{pmatrix}$$

Muestre que $g(u, w) = f \circ \varphi^{-1}(u, w)$ esta bien definida y que $g \in C^2$.

b) Usando el cambio de variables anterior demuestre que la ecuación (1) se transforma en

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial w} = 0 \quad (2)$$

c) Determine la solución general de (2), luego deduzca la solución general para la ecuación (1). Encuentre una solución particular de (1) que no sea un polinomio.

P3. Derivadas parciales de orden superior.
Considere la siguiente función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 \arctan(\frac{y}{x}) - y^2 \arctan(\frac{x}{y}) & \text{si} \quad x \neq 0 \text{ e } y \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \text{ o } y = 0 \end{cases}$$

1) Calcule $\lim\limits_{h \to 0} f(h, y)$ $\lim\limits_{h \to 0} f(x, h)$ para $x \neq 0$ e $y \neq 0$

2) Para $(x, y) \neq (0, 0)$ calcule $\nabla f(x, y)$, $H_f(x, y)$. Verificar que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

3) ¿ Se puede concluir que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$? Calcule y explique.

- **Teorema del Valor Medio**

  Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. Sea $f : U \to \mathbb{R}$ diferenciable en todo U. Entonces para todo $x, y \in U$ que cumplen $[x, y] \subseteq U$, se tiene que existe $z \in [x, y]$ tal que

$$f(x) - f(y) = < \bigtriangledown f(z), x - y >$$

- **Teorema de Clairaut en $\mathbb{R}^2$**

  Sea $f : U \to \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto y $f \in C^2(U)$ entonces

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \quad \forall (x, y) \in U$$